KODE MAT. 01

MATRIK

BAGIAN PROYEK PENGEMBANGAN KURIKULUM
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH KEJURUAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
2004

Kode MAT.01

Matriks

BAGIAN PROYEK PENGEMBANGAN KURIKULUM
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH KEJURUAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
2004

Kode MAT. 01

Matriks

Penyusun:

Drs. Mega Teguh B., M.Pd.

Editor:
Dr. Manuharawati, MSi.
Dra. Kusrini, M.Pd.

BAGIAN PROYEK PENGEMBANGAN KURIKULUM
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH KEJURUAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
2004

Kata Pengantar

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa atas karunia dan hidayah-Nya, kami dapat menyusun bahan ajar modul manual untuk SMK Bidang Adaptif, yakni mata pelajaran Fisika, Kimia dan Matematika. Modul yang disusun ini menggunakan pendekatan pembelajaran berdasarkan kompetensi, sebagai konsekuensi logis dari Kurikulum SMK Edisi 2004 yang menggunakan pendekatan kompetensi *(CBT: Competency Based Training).*

Sumber dan bahan ajar pokok Kurikulum SMK Edisi 2004 adalah modul, baik modul manual maupun interaktif dengan mengacu pada Standar Kompetensi Nasional (SKN) atau standarisasi pada dunia kerja dan industri. Dengan modul ini, diharapkan digunakan sebagai sumber belajar pokok oleh peserta diklat untuk mencapai kompetensi kerja standar yang diharapkan dunia kerja dan industri.

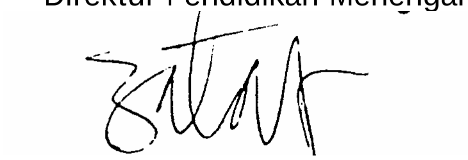
Modul ini disusun melalui beberapa tahapan proses, yakni mulai dari penyiapan materi modul, penyusunan naskah secara tertulis, kemudian disetting dengan bantuan alat-alat komputer, serta divalidasi dan diujicobakan empirik secara terbatas. Validasi dilakukan dengan teknik telaah ahli (*expert-judgment*), sementara ujicoba empirik dilakukan pada beberapa peserta diklat SMK. Harapannya, modul yang telah disusun ini merupakan bahan dan sumber belajar yang berbobot untuk membekali peserta diklat kompetensi kerja yang diharapkan. Namun demikian, karena dinamika perubahan sain dan teknologi di industri begitu cepat terjadi, maka modul ini masih akan selalu dimintakan masukan untuk bahan perbaikan atau direvisi agar supaya selalu relevan dengan kondisi lapangan.

Pekerjaan berat ini dapat terselesaikan, tentu dengan banyaknya dukungan dan bantuan dari berbagai pihak yang perlu diberikan penghargaan dan ucapan terima kasih. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini tidak berlebihan bilamana disampaikan rasa terima kasih dan penghargaan yang sebesar-besarnya kepada berbagai pihak, terutama tim penyusun modul (penulis, editor, tenaga komputerisasi modul, tenaga ahli desain grafis) atas dedikasi, pengorbanan waktu, tenaga, dan pikiran untuk menyelesaikan penyusunan modul ini.

Kami mengharapkan saran dan kritik dari para pakar di bidang psikologi, praktisi dunia usaha dan industri, dan pakar akademik sebagai bahan untuk melakukan peningkatan kualitas modul. Diharapkan para pemakai berpegang pada azas keterlaksanaan, kesesuaian dan fleksibilitas, dengan mengacu pada perkembangan IPTEK pada dunia usaha dan industri dan potensi SMK dan dukungan dunia usaha industri dalam rangka membekali kompetensi yang terstandar pada peserta diklat.

Demikian, semoga modul ini dapat bermanfaat bagi kita semua, khususnya peserta diklat SMK Bidang Adaptif untuk mata pelajaran Matematika, Fisika, Kimia, atau praktisi yang sedang mengembangkan modul pembelajaran untuk SMK.

Jakarta, Desember 2004
a. n. Direktur Jenderal Pendidikan
Dasar dan Menengah
Direktur Pendidikan Menengah Kejuruan,



Dr. Ir. Gatot Hari Priowirjanto, M. Sc.
NIP 130 675 814

DAFTAR ISI

- Halaman Sampul i
- Halaman Francis ii
- Kata Pengantar iii
- Daftar Isi v
- Peta Kedudukan Modul vii
- Daftar Judul Modul viii
- Glosary ix

I. PENDAHULUAN

A. Deskripsi 1
B. Prasyarat 1
C. Petunjuk Penggunaan Modul 1
D. Tujuan Akhir 2
E. Kompetensi 3
F. Cek Kemampuan 5

II. PEMBELAJARAN

A. Rencana Belajar Peserta Diklat 6

B. Kegiatan Belajar 7

1. Kegiatan Belajar 1 7
   a. Tujuan Kegiatan Pembelajaran 7
   b. Uraian Materi 7
   c. Rangkuman 20
   d. Tugas 21
   e. Kunci Tugas 22
   f. Tes Formatif 24
   g. Kunci Jawaban Formatif 24

4. Kegiatan Belajar 4 27
   a. Tujuan Kegiatan Pembelajaran 27
   b. Uraian Materi 27
   c. Rangkuman 38
   d. Tugas 39
   e. Kunci Tugas 39
   f. Tes Formatif 41
   g. Kunci Jawaban Formatif 41

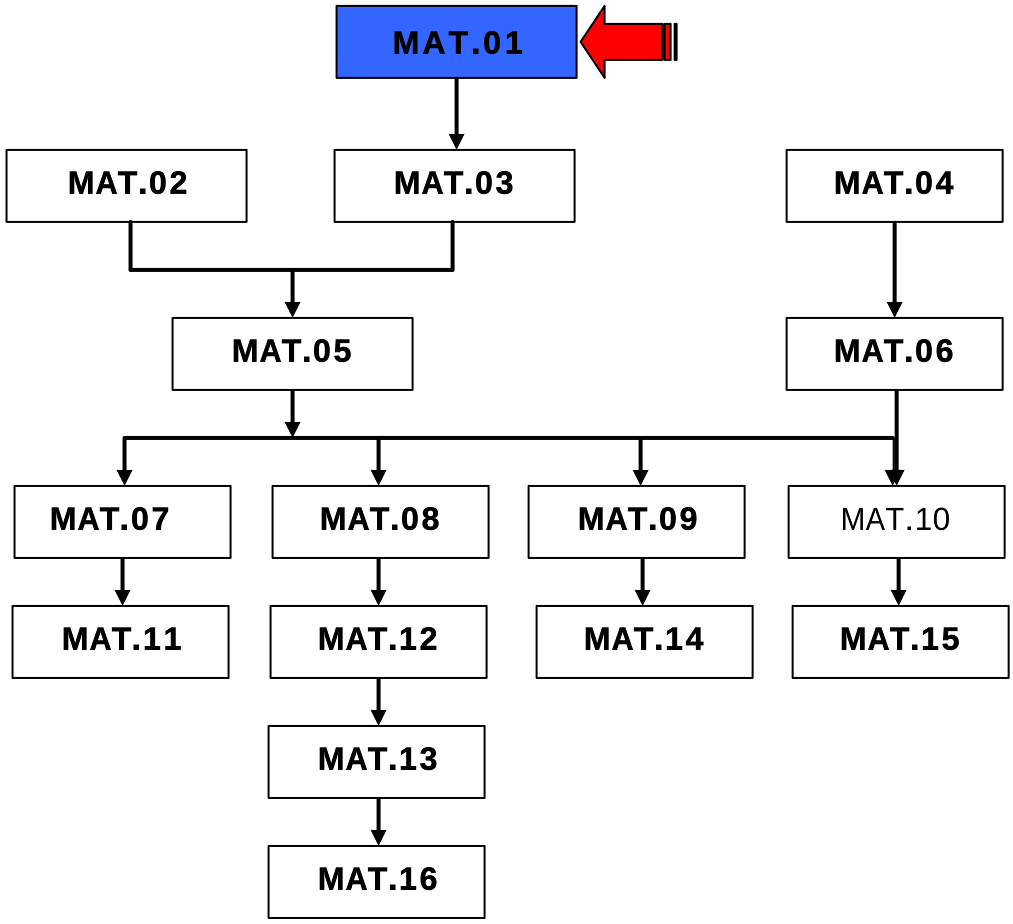
III. EVALUASI 44

KUNCI EVALUASI 45

IV. PENUTUP 49

DAFTAR PUSTAKA 50

PETA KEDUDUKAN MODUL



Daftar Judul Modul

No.	Kode Modul	Judul Modul
1	MAT.01	Matrik
2	MAT.02	Logika Matematika
3	MAT.03	Persamaan dan Pertidaksamaan
4	MAT.04	Geometri Dimensi Dua
5	MAT.05	Relasi Dan Fungsi
6	MAT.06	Geometri Dimensi Tiga
7	MAT.07	Peluang
8	MAT.08	Bilangan Real
9	MAT.09	Trigonometri
10	MAT.10	Irisan Kerucut
11	MAT.11	Statistika
12	MAT.12	Barisan
13	MAT.13	Aproksimasi Kesalahan
14	MAT.14	ProgramLinier
15	MAT.15	Vektor
16	MAT.16	Matematika Keuangan

Glossary

ISTILAH	KETERANGAN
Matrik	Susunan segi empat siku-siku dari bilangan yang diatur berdasarkan baris dan kolom/lajur.
Elemen, unsur atau entri	Bilangan-bilangan dalam susunan matriks.
Ordo matriks	ukuran matriks dijelaskan dengan menyatakan banyaknya baris (garis horizontal) dan banyaknya kolom (garis vertikal) yang terdapat dalam matriks tersebut.
Matriks nol	Matriks nol didefinisikan sebagai matriks yang setiap entri atau elemennya adalah bilangan nol.
Matriks satu/vektor satu	Matriks satu didefinisikan sebagai matriks yang setiap entri atau elemennya adalah 1.
Matriks baris/vektor baris	Matriks baris didefinisikan sebagai matriks yang entri atau elemennya tersusun dalam tepat satu baris.
Matriks kolom/vector lajur	Matriks kolom didefinisikan sebagai matriks yang entri atau elemennya tersusun dalam tepat satu kolom.
Matriks Persegi	Sebuah matriks dengan n baris dan n kolom dinamakan matriks kuadrat berorde n (square matrix of order n) dan entri-entri a_{11}, a_{22}, a_{33},..., a_{nn} berada pada diagonal utama dari A.
Matriks Segitiga Atas	Matriks segitiga atas adalah matriks persegi yang entri/elemennya memenuhi syarat a_{ij} ?a_{ij} *untuk i* ? *j* ? ?0 *untuk i* ? *j*
Matriks Segitiga Bawah	Matriks segitiga bawah adalah matriks persegi yang entri/elemennya memenuhi syarat a_{ij} ?a_{ij} *untuk i* ? *j* ? ?0 *untuk i* ? *j*
Matriks tranpose	Suatu matriks yang diperoleh dari perpindahan baris pada matriks A menjadi kolom pada matriks A^t. Jadi dapat dituliskan dalam rumus:

Matrik diagonal	Matriks diagonal adalah matriks persegi yang entri/elemennya memenuhi syarat a_{ij} ?0 *untuk i*? *j* ? ?a_{ij} *untuk i*? *j* ? ?0 *untuk i*? *j*
Penjumlahan Matriks	Matriks Identitas adalah matriks persegi yang entri/elemennya memenuhi syarat a_{ij}
Matriks Identitas/Matriks Satuan (I)	Ssuatu matriks dan k adalah suatu skalar, maka hasil kali kA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan entri/elemen dari A oleh k.
Perkalian Skalar dengan Matriks	Jika A adalah suatu matriks dan k adalah suatu skalar, maka hasil kali kA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan entri/elemen dari A oleh k.

BAB I. PENDAHULUAN

A. Deskripsi

Dalam modul ini anda akan mempelajari Pengertian matriks, notasi matriks, baris kolom, elemen dan ordo matriks, jenis-jenis matriks, kesamaan matriks, tranpose matriks. Anda juga mempelajari penyelesaian operasi matriks: penjumlahan, dan pengurangan, perkalian skalar dengan matriks, perkalian matriks dengan matriks, determinan matriks, minor, kofaktor dan adjoin matriks dan invers matriks. Anda juga mempelajari penyelesaian sistem persamaan linier dengan menggunakan matriks.

B. Prasyarat

Prasyarat untuk mempelajari modul ini adalah anda harus sudah mempelajari relasi dan fungsi, persamaan serta operasi pada bilangan real. Semua materi prasyarat tersebut terdapat dalam modul Relasi dan Fungsi, persamaan dan pertidaksamaan dan bilangan real.

C. Petunjuk Penggunaan Modul

a. Pelajari daftar isi serta skema kedudukan modul dengan cermat dan teliti karena dalam skema modul akan nampak kedudukan modul yang sedang Anda pelajari ini antara modul-modul yang lain.
b. Perhatikan langkah-langkah dalam melakukan pekerjaan dengan benar untuk mempermudah dalam memahami suatu proses pekerjaan, sehingga diperoleh hasil yang optimal.
c. Pahami setiap teori dasar yang akan menunjang penguasaan materi dengan membaca secara teliti. Bilamana terdapat evaluasi maka kerjakan evaluasi tersebut sebagai sarana latihan.

d. Jawablah tes formatif dengan jawaban yang singkat dan jelas serta kerjakan sesuai dengan kemampuan Anda setelah mempelajari modul ini.
e. Bila terdapat penugasan, kerjakan tugas tersebut dengan baik dan bila perlu konsultasikan hasil penugasan tersebut kepada guru/instruktur.
f. catatlah semua kesulitan Anda dalam mempelajari modul ini untuk ditanyakan pada guru/instruktur pada saat tatap muka. Bacalah referensi lain yang ada hubungan dengan materi modul ini agar Anda mendapatkan pengetahuan tambahan.

D. Tujuan Akhir

Setelah mempelajari modul ini diharapkan Anda dapat:

1. Memahami pengertian matriks, notasi matriks, baris kolom, elemen dan ordo matriks, jenis-jenis matriks, kesamaan matriks, tranpose matriks.
2. menyelesaikan operasi matriks: penjumlahan, dan pengurangan, perkalian skalar dengan matriks, perkalian matriks dengan matriks, determinan matriks, minor, kofaktor dan adjoin matriks dan invers matriks.
3. Menyelesaikan sistem persamaan linier dengan menggunakan matriks.

E. Kompetensi

KOMPETENSI : MATRIKS
PROGRAM KEAHLIAN : program adaktif
KODE : MATEMATIKA/MAT 01
DURASI PEMBELAJARAN : 28 Jam @ 45 menit

SUB KOMPETENSI	KRITERIA KINERJA	LINGKUP BELAJAR	MATERI POKOK PEMBELAJARAN		
			SIKAP	PENGETAHUAN	KETERAMPILAN
1. Mendeskripsikan macam-macam matriks	✍ Matriks dibedakan menurut jenisnya	✍ Macam-macam matriks	✍ Teliti dan cermat dalam menerapkan konsep matriks	✍ Pengertian matriks, notasi matriks, baris kolom, elemen dan ordo matriks ✍ Jenis-jenis matriks ✍ Kesamaan Matriks ✍ Transpose matriks	✍ Mengoperasikan matriks
2. Menyelesaikan operasi matriks	✍ Operasi matriks diselesaikan dengan menggunakan aturan yang berlaku	✍ Operasi matriks	✍ Teliti dan cermat dalam menerapkan konsep matriks	✍ Penyelesaian operasi matriks : - penjumlahan dan pengurangan - perkalian skalar dengan matriks - perkalian matriks dengan matriks.	
3. Menentukan determinan dan invers	✍ Determinan dan invers matriks ditentukan dengan aturan yang berlaku	✍ Determinan dan Invers matriks	✍ Teliti dan cermat dalam menerapkan konsep matriks	✍ Determinan matriks ✍ Minor, kofaktor dan adjoin matriks ✍ Invers matriks ✍ Penyelesaian sistem persamaan linier dengan menggunakan matriks.	

F. Cek kemampuan

Kerjakanlah soal-soal berikut ini. Jika anda merasa dapat mengerjakan semua soal berikut ini, maka anda dapat langsung mengerjakan soal-soal Evaluasi pada BAB III.

1. Apakah yang dimaksud dengan matriks?
2. Kapankah dua matriks dikatakan sama?
3. Tentukan tranpos dari matriks A = $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$
4. Jika A = $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ dan B = $\begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, maka hitung 5(A + B)
5. Jika A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$; B = $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, hitung A x B
6. Tentukan determinan matriksA = $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

BAB II. PEMBELAJARAN

A. Rencana Belajar Siswa

Kompetensi : Menerapkan konsep matriks.
Sub Kompetensi :
- Mendeskripsikan macam-macam matriks
- Menyelesaikan operasi matriks
- Menentukan determinan dan invers

Tulislah semua jenis kegiatan yang anda lakukan di dalam tabel kegiatan di bawah ini. Jika ada perubahan dari rencana semula, berilah alasannya kemudian meminta tangan kepada guru atau instruktur anda.

Jenis Kegiatan	Tanggal	Waktu	Tempat Belajar	Alasan perubahan	Tanda Tangan Guru

B. KEGIATAN BELAJAR

1. Kegiatan Belajar 1

a. Tujuan Kegiatan Pembelajaran

Setelah mempelajari kegiatan belajar ini, diharapkan anda dapat:

- ✍ Memahami pengertian matriks, notasi matriks, baris kolom, elemen dan ordo matriks.
- ✍ Menyatakan jenis-jenis matriks, kesamaan matriks, dan tranpose matriks.
- ✍ Menyelesaikan operasi matriks: penjumlahan, dan pengurangan, perkalian skalar dengan matriks, perkalian matriks dengan matriks.

b. Uraian Materi

NOTASI MATRIKS

Bentuk umum matriks: Matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan yang diatur berdasarkan baris dan kolom/lajur. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan **entri** dalam matriks atau disebut juga ***elemen*** atau ***unsur***.

$$A_{mxn} = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow \text{Baris ke - i} \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

Kolom ke - j

Keterangan:

a_{ij} artinya entri matriks A yang berada pada baris ke-i dan kolom j.

ORDO MATRIKS

Ordo matriks atau ukuran matriks dijelaskan dengan menyatakan banyaknya baris (garis horizontal) dan banyaknya kolom (garis vertikal) yang terdapat sdalam matriks tersebut. Jadi, suatu matriks yang mempunyai m baris dan n kolom disebut matriks berordo m x n.

JENIS-JENIS MATRIKS

Matriks dibedakan berdasarkan berbagai susunan entri dan bilangan pada entrinya. Sehingga matriks dibedakan sebagai berikut:

1. Matriks nol

Matriks nol didefinisikan sebagai matriks yang setiap entri atau elemennya adalah bilangan nol.

Contoh 1

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Matriks satu/vektor satu

Matriks satu didefinisikan sebagai matriks yang setiap entri atau elemennya adalah 1.

Contoh 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \; C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Matriks baris/vektor baris

Matriks baris didefinisikan sebagai matriks yang entri atau elemennya tersusun dalam tepat satu baris.

Contoh 3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}; \; B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

4. Matriks kolom/vektor lajur

Matriks kolom didefinisikan sebagai matriks yang entri atau elemennya tersusun dalam tepat satu kolom.

Contoh 4

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \; ; \; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

5. Matriks Persegi

Sebuah matriks dengan n baris dan n kolom dinamakan matriks kuadrat berorde n (square matrix of order n) dan entri-entri a_{11}, a_{22}, a_{33},..., a_{nn} berada pada diagonal utama dari A.

Contoh 5

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \; ; \; B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 8 \\ 1 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

Matriks Persegi dibedakan menjadi:

a) Matriks Segitiga Atas

Matriks segitiga atas adalah matriks persegi yang entri/elemennya memenuhi syarat $a_{ij} \begin{cases} a_{ij} & untuk\ i \,?\, j \\ 0 & untuk\ i \,?\, j \end{cases}$

Contoh 6

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \; ; \; B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

b) Matriks Segitiga Bawah

Matriks segitiga bawah adalah matriks persegi yang entri/elemennya memenuhi syarat $a_{ij} \begin{cases} a_{ij} & untuk\ i \,?\, j \\ 0 & untuk\ i \,?\, j \end{cases}$

Contoh 7

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 9 & 4 & 0 \\ 2 & 8 & 7 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

c) *Matriks Diagonal*

Matriks diagonal adalah matriks persegi yang entri/elemennya memenuhi syarat

$$a_{ij} \begin{cases} 0 & untuk \ i < j \\ a_{ij} & untuk \ i = j \\ 0 & untuk \ i > j \end{cases}$$

Contoh 8

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} ; C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

d) *Matriks Identitas/Matriks Satuan (I)*

Matriks Identitas adalah matriks persegi yang entri/elemennya memenuhi syarat

$$a_{ij} \begin{cases} 0 & untuk \ i < j \\ 1 & untuk \ i = j \\ 0 & untuk \ i > j \end{cases}$$

Contoh 9

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

KESAMAAN MATRIKS

Definisi. Jika A dan B suatu matriks m x n, maka A=B jika dan hanya jika ordo kedua matriks tersebut sama dan entri/elemen yang seletak sama.

Dari definisi di atas, dua buah matriks dikatakan sama jika:

1. Ordo kedua matriks itu sama.
2. Entri/elemen yang seletak sama.

Contoh 10

1. A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$; B = $\begin{bmatrix} \frac{2}{2} & 2 & 3 \\ \frac{4}{4} & \frac{8}{2} & 5 \end{bmatrix}$

   Dua matriks di atas, memiliki ordo dan elemen yang seletak sama, maka berdasarkan definisi dikatakan A = B.

2. C = $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; Q = $\begin{bmatrix} 4 & z - 5 \\ y + 2 & x - 1 \end{bmatrix}$

   Jika P = Q, tentukan x, y dan z?

   Jawab: x – 1 = 1   z – 5 = 3

   x = 2   z = 8

   y + 2 = 2

   y = 0

TRANPOSE SUATU MATRIKS

Definisi. Jika A adalah suatu matriks m x n, maka tranpose A dinyatakan oleh A^t dan didefinisikan dengan matriks n x m yang kolom pertamanya adalah baris pertama dari A, kolom keduanya adalah baris kedua dari A, demikian juga dengan kolom ketiga adalah baris ketiga dari A dan seterusnya.

Dari definisi di atas, dapat juga dikatakan bahwa matriks tranpose adalah suatu matriks yang diperoleh dari perpindahan baris pada matriks A menjadi kolom pada matriks A^t. Jadi dapat dituliskan dalam rumus:

$$\boxed{A_{mxn} = a_{ij} \rightarrow A^t_{nxm}}$$

Contoh 11

1. A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$; A^t = $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

2. $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 5 & 6 & 10 \\ 0 & 7 & 8 & 15 \end{bmatrix}$; $B^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \\ 5 & 10 & 15 \end{bmatrix}$

Dari matriks tranpose ini, muncul istilah matriks simetrik (setangkup). Hal ini terjadi misalkan A suatu matriks, jika A = A^t maka A disebut matriks simetrik/setangkup.

<u>Contoh 12</u>

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; $A^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ karena A = At , maka A disebut matriks simetrik.

$B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $B^t = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ karena B = Bt maka B disebut matriks simetrik.

OPERASI PADA MATRIKS

Penjumlahan Dua Matriks

Definisi. A dan B adalah suatu dua matriks yang ukurannya sama, maka jumlah A + B adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan bersama-sama entri yang seletak/bersesuaian dalam kedua matriks tersebut. Matriks-matriks yang ordo/ukurannya berbeda tidak dapat ditambahkan.

Dari definisi di atas, dapat dikatakan bahwa dua matriks dapat dijumlahkan jika ordonya sama, penjumlahan dilakukan pada elemen yang seletak. Jadi dapat dituliskan dalam rumus: $\boxed{A_{mxn} + B_{mxn} = C_{mxn}}$

<u>Contoh13</u>

1. $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

Hitung: a) A + B

b) B + A

Jawab:

a. $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0+10 & 3+(-5) \\ 1+2 & 4+(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

b. $B + A = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 10+0 & -5+3 \\ 2+1 & -1+4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

2. $P = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $Q = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$; dan $R = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 5 & -7 & 1 \end{pmatrix}$

Hitung:

a) P + Q + R

b) (P+Q) + R

c) P + (Q+R)

Jawab:

a) $P + Q + R = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 5 & -7 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -2+0+3 & -5+3+(-3) & 1+5+4 \\ 4+1+5 & 1+(-1)+(-7) & 0+(-2)+1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & -5 & 10 \\ 10 & -7 & -1 \end{pmatrix}$

b) $P + Q = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -2+0 & -5+3 & 1+5 \\ 4+1 & 1+(-1) & 0+(-2) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -2 & -2 & 6 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$(P+Q) + R = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 6 \\ 5 & 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 5 & -7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -5 & 10 \\ 10 & -7 & -1 \end{bmatrix}$$

c) $$Q + R = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 5 & -7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+3 & 3+(-3) & 5+4 \\ 1+5 & -1+(-7) & -2+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 6 & -8 & -1 \end{bmatrix}$$

$$P + (Q+R) = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 6 & -8 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -5 & 10 \\ 10 & -7 & -1 \end{bmatrix}$$

Dari contoh (1) dan (2) diperoleh sifat-sifat:

1) A + B = B + A → **Komutatif**
2) (A+B)+C = A + (B+C) → **Asosiatif**

Pengurangan Dua Matriks

Dalam pengurangan matriks ini, kita perlu mengetahui terlebih dahulu tentang lawan suatu matriks. Lawan suatu matriks dapat dijelaskan sebagai berikut:

Jika A suatu matriks, maka matriks –A disebut lawan dari matriks A.

Contoh 14

1) Jika $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$,

a) Tentukan lawan dari A?

b) Hitung A+(-A)?

Jawab:

a) $\mathbf{A = -}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{A+(-A) =} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2) Jika $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Hitung A-B ?

Jawab:

$A-B = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -5-3 & 3-(-1) \\ 6-2 & -1-(-1) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

$-B = -\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$A + (-B) = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -5+(-3) & 3+1 \\ 6+(-2) & -1+1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

Dari contoh (1) dan (2) dapat ditemukan sifat-sifat sebagai berikut:

1). A + (-A) = (-A) + A = 0 (Matriks Nol)
2). A + 0 = 0 + A = A
3). A + (-B) = A - B

Perkalian Skalar dengan Matriks

Definisi. Jika A adalah suatu matriks dan k adalah suatu skalar, maka hasil kali kA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan entri/elemen dari A oleh k.

Dari definisi di atas, dapat juga dijelaskan bahwa misal k suatu skalar, anggota bilangan real, dan A = aij suatu matiks. Maka: $kA = ka_{ij}$

Contoh 15

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Hitung :

a) 2A

b) (-3)A

Jawab:

a) 2A $= 2 \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x1 & 2x4 \\ 2x2 & 2x3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

b) (-3) A $= -3 \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x1 & -3x4 \\ -3x2 & -3x3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -12 \\ -6 & -9 \end{bmatrix}$

2) A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 7 \end{bmatrix}$; B = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Hitung:

a) 2A + 3B

b) 0,1A – 1,2B

Jawab:

a) 2A + 3B $= 2 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 7 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 6 & 0 & -4 \\ 8 & 6 & 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 6 & -3 & 2 \\ 11 & 12 & 23 \end{bmatrix}$

b) 0,1A – 1,2B $= 0{,}1 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 7 \end{bmatrix} - 1{,}2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0 & -0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1{,}2 & 2{,}4 & 3{,}6 \\ 0 & -1{,}2 & 2{,}4 \\ 1{,}2 & 1{,}2 & -1{,}2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -1{,}1 & -1{,}4 \\ 0{,}3 & 1{,}2 & -2{,}6 \\ -0{,}8 & -2{,}1 & -2{,}9 \end{bmatrix}$$

Dari contoh di atas maka diperoleh sifat-sifat sebagai berikut:

Jika A, B suatu matriks dan r, s skalar, maka:		
1) $(r + s)\,A$	**$= rA + sA$**	
2) $r(A + B)$	**$= rA + rB$**	
3) $r(sA)$	**$= s(rA)$**	**$= (rs)\,A$**
4) $1.\,A$	**$= A.\,1$**	**$= A$**
5) $(-1)\,A$	**$= A\,(-1)$**	**$= -A$**

Perkalian Matriks dengan Matriks

Definisi. Jika A adalah matriks m x r dan B adalah matriks r x n, maka hasil kali AB adalah matriks m x n yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut. Untuk mencari entri dalam baris i dan kolom j dari AB, pilihlah baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B. Kalikanlah entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut bersama-sama kemudian tambahkanlah hasil kali yang dihasilkan.

Dari definisi di atas, dapat dikatakan bahwa dua matriks dapat dikalikan jika jumlah kolom matriks pertama sama dengan jumlah baris matriks kedua. Hal ini dapat dituliskan sebagai berikut: $\boxed{A_{mxr} \times B_{rxn} = C_{mxn}}$

Cara perkaliannya adalah dengan mengalikan baris matriks A dan kolom matriks bersama-sama kemudian menambahkan hasil kali yang diperoleh.

<u>Contoh 16</u>

1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$; $P = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$; $Q = \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$

Hitung:

a) A x B

b) P x Q

Jawab:

a) A x B = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ = ((2x1) + (1x2)) = (2 + 2) = (4) = 4

b) P x Q = $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ = -18 – 16 + 3 + 0 = -31

2) A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$; B = $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; P = $\begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$; Q = $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Hitung:

a) A x B

b) P x Q

Jawab:

a) AxB = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2x5)+(1x3) & (2x6)+1x4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10+3 & 12+4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 13 & 16 \end{bmatrix}$

b) P x Q = $\begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} (6x6)+(5x1)+(4x2)+(3x0) & (6x0)+(5x0)+(4x2)+(3x1) & (6x0)+(5x3)+(4x3)+(3x1) \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 36+5+8+0 & 0+0+8+3 & 0+15+12+3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 49 & 11 & 30 \end{bmatrix}$

3) A = $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$; B = $\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$; P = $\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix}$; Q = $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Hitung:

a) A x B

b) P x Q

Jawab:

a) A x B = $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (5x5) + (4x4) \\ (4x5) + (3x4) \\ (3x5) + (2x4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 \\ 32 \\ 23 \end{bmatrix}$

b) P x Q = ...

Walaupun banyak dari aturan-aturan ilmu hitung bilangan riel berlaku juga untuk matriks, namun terdapat beberapa perkecualian. Salah satu dari perkecualian itu terjadi dalam perkalian matriks. Untuk bilangan riel *a* dan *b*, berlaku *ab* = *ba* yang sering disebut hukum komutatif untuk perkalian. Akan tetapi, pada matriks AB dan BA tidak selalu sama. Ada dua hal pokok yang menyebabkan ketidaksamaan AB dan BA yaitu:

1. Hasil dari AB didefinisikan, namun BA tidak terdefinisi. Ini adalah kasus jika A adalah matriks 2 x 3 dan B adalah matriks 3 x 4.
2. Hasil AB dan BA didefinisikan tetapi tiap-tiap entri/elemen yang bersesuaian pada kedua matriks itu tidak sama.

Contoh 17

A = $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$; B = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

Hitung: AB dan BA, Kemudian bagaimana hasil AB dan BA?

Jawab:

AB = $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$

BA = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

Dari hasil AB dan BA di atas disimpulkan bahwa AB $\neq$ BA.

Di bawah ini sifat-sifat yang berlaku pada perkalian matriks yaitu:

1. A x B = B x A

An = <u>AAA.............A</u> ; n = bilangan asli

(sebanyak n factor)

2. ABC = A(BC) = (AB)C ....Hukum asosiatif untuk perkalian

3. (B $\pm$ C) = AB $\pm$ AC dan (B $\pm$ C)A = BA $\pm$ CA ....Hukum distributif

c. Rangkuman 1

1. Jenis-jenis matriks adalah matriks nol, matriks baris, matriks kolom, matriks persegi.
2. Matriks persegi terdiri dari matriks identitas, matriks atas, matriks bawah, matriks diagonal.
3. matriks tranpose adalah suatu matriks yang diperoleh dari perpindahan baris pada matriks A menjadi kolom pada matriks A^t. Jadi dapat dituliskan dalam rumus: $A_{mxn} = a_{ij}$? A^t_{nxm}
4. Pada penjumlahan matriks berlaku

   A + B = B + A ? Komutatif

   (A+B)+C = A + (B+C) ? Asosiatif

   A + (-A) = (-A) + A = 0 (Matriks Nol)

   A + 0 = 0 + A = A

   A + (-B) = A - B
5. Pada perlakian matriks berlaku

   Jika A, B suatu matriks dan r, s skalar, maka:

   (r ? s) A = rA ? sA

   r(A ? B) = rA ? rB

   r(sA) = s(rA) = (rs) A

   1. A = A. 1 = A

   (-1) A = A (-1) = -A

An = <u>AAA............A</u> ; n = bilangan asli

(sebanyak n factor)

ABC = A(BC) = (AB)C ....Hukum assosiatif untuk perkalian

(B$\pm$C) = AB $\pm$ AC dan (B$\pm$C)A = BA $\pm$ CA ....Hukum distributif

d. Tugas Latihan 1

1. Diketahui persamaan matriks sebagai berikut:

   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & x \\ 3z & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x & 4 \\ 16y & 9z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & -6 \\ 2y & 5z \end{pmatrix}$$

   Tentukan nilai dari y!

2. Misalkan P = $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ dan Q = $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

   Hitunglah:

   a) PQ^2!

   b) Apakah PQ^2 = Q!

   c) Buktikan PQ = I!

3. Jika A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ dan B = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, maka hitunglah nilai dari:

   (A – B) (A + B) + (B – A) (B + A)?

4. Tentukanlah determinan dari matriks $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$?

5. Jika diketahui N = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, maka tentukanlah invers dari matriks N atau N^{-1}!

6. Diberikan dua buah matriks yaitu:

   A = $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ dan B = $\begin{pmatrix} a & x \\ -b & c \end{pmatrix}$

   Jika $A^{-1} = B^T$, maka tentukanlah nilai dari b!

e. Kunci Tugas 1

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & x \\ 3z & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x & 4 \\ 16y & 9z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & -6 \\ 2y & 5z \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} z + 6z & x + 2x \\ -2z + 9z & -2x + 3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x & 10 \\ 14y & 4z \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 7z & 3x \\ 7z & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x & 10 \\ 14y & 4z \end{pmatrix}$

Sehingga dapat dibuat persamaan sebagai berikut:

$3x = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{3}$; $x = 4z \Rightarrow 4z = \frac{10}{3} \Rightarrow z = \frac{10}{12}$

$14y = 7z \Rightarrow 14y = 7.\frac{10}{12} \Rightarrow y = \frac{7.10}{14.12} = \frac{5}{12}$

2. adalah:

a) $Q^2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$PQ^2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

b) ya

c) $PQ = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. $A-B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

$(A-B)(A+B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

$A + B = B + A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.......sifat komutatif pada penjumlahan

$$A - B = -(B-A) = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(B-A)(B+A) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$$

sehingga:

$$(A-B)(A+B) + (B-A)(B+A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. $\det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

   $= 2(6-2) - 3(3-4) + 4(1-4)$

   $= 2(4) - 3(-1) + 4(-3)$

   $= 8 + 3 - 12$

   $= -1$

5. $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; $\det N = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 0 = 3$, maka :

   $N^{-1} = \dfrac{1}{\det N}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

6. $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$

   $B^T = \begin{pmatrix} a & -b \\ x & c \end{pmatrix}$

   Karena $A^{-1} = B^T$ maka: $\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ x & c \end{pmatrix} \Rightarrow -b = -\dfrac{1}{5} \Rightarrow b = \dfrac{1}{5}$

f. Tes Formatif

1. Misalkan P = $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; Q = $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ dan R = $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ serta a= -3, b= 2 masing-masing adalah suatu skalar

   Buktikanlah:

   a) P+ (Q+R)=(P+Q) + R

   b) (a+b)R = aR + bR

2. Dari soal no. 2 di atas. Buktikan bahwa:

   a) a(QR)=(aQ)R = Q(aR)

   b) P(Q-R) = PQ - PR

3. Dari soal no. 2 di atas. Buktikan bahwa:

   $(P+Q)^t = P^t + Q^t$

4. Jika A = $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ dan B = $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$, maka hitunglah nilai dari:

   (A – B) (A + B) + (B – A) (B + A)?

5. Diketahui persamaan matriks sebagai berikut:

   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 1 \\ 4 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -2x+8 & 9 \end{pmatrix}$$

   Tentukan nilai dari y!

g. Kunci Jawaban Formatif

1. a) P = $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ Q+R = $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$

   P + Q = $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ sehingga:

   P+(Q+R) = $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 14 \end{pmatrix}$ ....(1)

   (P+Q)+R = $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 14 \end{pmatrix}$................(2)

Dari hasil (1) dan (2) di atas terbukti bahwa: P+ (Q+R)=(P+Q) + R

b) $R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ dan a= -3, b= 2

$(a+b)R = -1\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$

$aR = -3\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -12 & -18 \end{bmatrix}$; $bR = 2\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 8 & 12 \end{bmatrix}$

sehingga:

$aR + bR = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -12 & -18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 8 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$

maka terbukti bahwa: (a+b)R = aR + bR

2.

a) a=-3 ; $QR = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 20 & 29 \end{bmatrix}$ maka $a(QR) = -3\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 20 & 29 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ -60 & -87 \end{bmatrix}$

$(aQ)R = -3\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 0 \\ -3 & -15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ -60 & -87 \end{bmatrix}$;

$Q(aR) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.-3\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -12 & -18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ -60 & -87 \end{bmatrix}$

Jadi terbukti bahwa: a(QR)=(aQ)R = Q(aR)

b) $P = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$; $Q-R = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$

$PQ = \begin{bmatrix} 14 & 10 \\ -1 & 15 \end{bmatrix}$; $PR = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ -4 & 19 \end{bmatrix}$

Dengan menghitung nilai P(Q-R) dan PQ – PR dapat dibuktikan bahwa:

P(Q-R) = PQ – PR

3. P+Q = $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ maka $(P+Q)^t$ = $\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ sedangkan P^t = $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ dan

Q= $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ maka Q^t = $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ sehingga:

$$P^t + Q^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = (P+Q)^t$$

4. $A - B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$

$(A-B)(A+B) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + (-7) & 0 + 0 \\ -6 + 0 & -21 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ -6 & -21 \end{pmatrix}$

$A + B = B + A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$.......sifat komutatif pada penjumlahan

$A - B = -(B-A) = -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $(B-A)(B+A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 6 & 21 \end{pmatrix}$

sehingga:

$(A-B)(A+B) + (B-A)(B+A) = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ -6 & -21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 6 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 1 \\ 4 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & 3 \\ -2x-8 & 9 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x+8 & 1+2y \\ -2x+12 & -2+3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+8 & 5 \\ -2x+12 & 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 7z & 3x \\ 7z & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7x & 10 \\ 14y & 4z \end{pmatrix}$

Sehingga dapat dibuat persamaan sebagai berikut:

$1 + 2y = 5 \Rightarrow 2y = 5 - 1 = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{2} = 2$ atau

$-2 + 3y = 4 \Rightarrow 3y = 4 + 2 = 6 \Rightarrow y = \frac{6}{3} = 2$

2. Kegiatan Belajar 2

a. Tujuan Kegiatan Pembelajaran

Setelah mempelajari kegiatan belajar ini, diharapkan anda dapat:

- ✍ Menghitung determinan matriks, minor, kofaktor dan adjoin matriks, dan invers matriks.
- ✍ Menyelesaikan sistem persamaan linier dengan menggunakan matriks.

b. Uraian Materi

DETERMINAN DAN INVERS MATRIKS

Definisi. Misalkan A adalah matriks persegi. Fungsi determinan dinyatakan oleh *det*, dan kita definisikan det (A) sebagai jumlah hasil kali elementer bertanda dari A. Jumlah det (A) dinamakan determinan A.

Dari definisi di atas, determinan matriks dapat dijelaskan sebagai suatu skalar yang diperoleh dari elemen-elemen matriks dengan operasi tertentu (jumlah hasil kali elementer bertanda dari matriks tersebut), yang merupakan karakteristik matriks.

Untuk lebih jelasnya marilah kita tinjau contoh berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Maka: $\det(A) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} + (-a_{21}a_{22}) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{22}$

$\det(B) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$

Determinan Matriks berordo 2 x 2

Misal A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ maka det A = det $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ = ad – bc

<u>Contoh1</u>

Tentukan determinan matriks-matriks berikut ini.

a) A = $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) B = $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$

c) C = $\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

<u>Jawab:</u>

a) det A = det $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ = (3x2)-(4x1) = 6 – 4 = 2

b) det B = det $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$ = (2x(-3)) – ((-1)x6) = -6 – (-6) = -6 + 6 = 0

c) det C = det $\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ = ((-4)x1) – ((-3)x(-2)) = -4 – 6 = -10

Determinan Matriks berordo 3 x 3

Misalkan A = $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ maka besar det (A) dapat dihitung dengan dua cara:

Cara I : $\begin{array}{c} \qquad\quad (-)\ (-)\ (-) \\ \begin{pmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{pmatrix} \\ \qquad\qquad (+)\ (+)\ (+) \end{array}$

Determinan Matriks melalui cara di atas, diperoleh dengan menjumlahkan hasil kali pada panah-panah yang mengarah ke kanan dan mengurangkan hasil kali panah-panah yang mengarah ke kiri.

Maka det (A) = acf + bfg + cdh – gec – hfa – idb

$$\begin{array}{ccc} (+) & (-) & (+) \end{array}$$

Cara II: $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

Maka det (A) = a $\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}$ - b $\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}$ + c $\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$

Contoh 2

1) A = $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, hitung det(A) dengan dua cara?

Jawab:

Cara I : $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

sehingga det (A) = (3x1x1) + (1x1x2) + (2x1x3) – (2x1x2) –(3x1x3)-(1x1x1)

= 3 + 2 + 6 – 4 – 9 – 1

= -3

Cara II: det(A) = 3 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ - 1 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ + 2 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

= 3 (1-3) – (1-2) + 2 (3-2)

= 3 (-2) – (-1) + 2(1)

= -6 + 1 + 2

= -3

2) Hitung determinan matriks dari B = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ dengan menggunakan dua cara?

Jawab :

Teorema. misalkan A adalah suatu matriks n x n.

(a) Jika A’ adalah matriks yang dihasilkan bila baris tunggal A dikalikan konstanta k, maka det (A) = k det (A).

(b) Jika A’ adalah matriks yang dihasilkan bila dua baris A dipertukarkan, maka det (A) = - det (A).

(c) Jika A’ adalah matriks yang dihasilkan bila kelipatan satu baris A ditambahkan pada baris yang lain, maka det(A’) = det (A).

Contoh3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix};\ C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix};\ D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Jika det (A) = -2, tentukan determinan matriks-matriks yang lain menggunakan sifat-sifat di atas?

Jawab:

Matriks B dihasilkan dengan mengalikan baris ke-1 matriks A dengan 4. Sehingga sesuai sifat di atas, det(B) = 4 x det (A) = 4 x (-2) = -8.

Matriks C dihasilkan dengan menukar baris ke-1 dan baris ke-2. Sehingga sesuai dengan sifat di atas, det (C) = - det (A) = - (-2) = 2.

Matriks D dihasilkan dengan mengalikan –2 baris ke-1 dari A, kemudian ditambahkan pada baris ke-2. Sehingga menurut sifat di atas, det (D) = det (A) = -2.

MINOR, KOFAKTOR DAN ADJOIN MATRIKS

Definisi. Jika A adalah matriks persegi, maka minor entri a_{ij} dinyatakan oleh M_{ij} dan didefinisikan menjadi determinan submatriks yang tetap setelah baris ke *i* dan kolom ke *j* dicoret dari A. bilangan $(-1)^{i+j}$ M_{ij} dinyatakan oleh C_{ij} dan dinamakan kofaktor entri a_{ij}.

Contoh 4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Minor entri a_{11} adalah $M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -26$

Kofaktor a_{11} adalah $C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = 26$

Demikian juga, minor entri a_{32} adalah $M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -10$

Kofaktor a_{32} adalah $C_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = M_{32} = -(-10) = 10$

Definisi. Jika A adalah suatu matriks n x n dan Cij adalah kofakor aij, maka matriks $\begin{bmatrix} C11 & C12 & \cdots & C1n \\ C21 & C22 & \cdots & C2n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Cn1 & Cn2 & \cdots & Cnn \end{bmatrix}$ dinamakan matriks kofaktor A. Tranpose matriks ini dinamakan adjoin A dan dinyatakan dengan adj(A).

Contoh 5

$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 1 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ maka kofaktor A adalah

$C_{11} = -12$	$C_{12} = -10$	$C_{13} = -7$
$C_{21} = 4$	$C_{22} = -2$	$C_{23} = 16$
$C_{31} = -12$	$C_{32} = 6$	$C_{33} = 17$

Sehingga matriks kofaktor adalah:

$$\begin{bmatrix} -12 & -10 & -7 \\ 4 & -2 & 16 \\ -12 & 6 & 17 \end{bmatrix}$$

sedangkan adjoin A merupakan tranpose matriks kofaktor yaitu:

$$\begin{bmatrix} -12 & 4 & -12 \\ -10 & -2 & 6 \\ -7 & 16 & 17 \end{bmatrix}$$

INVERS MATRIKS

Teorema. Jika A adalah matriks persegi yang dapat dibalik, maka

$A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}$ adj(A)

Invers Matriks berordo 2 x 2

Misalkan A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ maka $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$ adj (A) = $\dfrac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

<u>Contoh 6</u>

A = $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ tentukan invers matriks A?

<u>Jawab:</u>

$$A^{-1} = \frac{1}{8-9}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = -1\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Invers Matriks berordo 3 x 3

Ada dua cara mencari invers matriks yaitu:

1. Menggunakan rumus $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}$ adj(A)
2. Menggunakan reduksi matriks atau metode penyapuan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

a) Membagi baris pertama dengan elemen yang ada dalam kolom pertama; gunakanlah baris yang dihasilkan untuk memperoleh nilai nol pada kolom pertama dari setiap baris yang lain.

b) Membagi baris kedua dengan elemen yang ada dalam kolom kedua; gunakanlah baris yang dihasilkan untuk memperoleh nilai nol pada kolom kedua dari setiap baris yang lain.

c) Membagi baris ke-n dengan elemen yang ada dalam kolom ke-n; gunakanlah baris yang dihasilkan untuk memperoleh nilai nol pada kolom ke-n dari setiap baris yang lain.

Contoh 7

Carilah invers dari matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$ menggunakan dua cara?

Jawab:

Cara I : $\det(A) = 1\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$

$= 1(-2) - 3(-3) + 3(-2)$

$= -2 + 9 - 6$

$= 1$

kofaktor A adalah

$C_{11} = -2$ $C_{12} = 3$ $C_{13} = -2$

$C_{21} = 0$ $C_{22} = 1$ $C_{23} = -1$

$C_{31} = -3$ $C_{32} = 3$ $C_{33} = -2$

matriks kofaktor A adalah: $\begin{bmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ dan $\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

Jadi $A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

Cara II:

$$\text{Langkah I}\quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & ?2 & ?3 & 0 & 1 & 0 \\ \cancel{?1} & \cancel{?2} & \cancel{?2} & \cancel{0} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & & \end{array}\right)$$

$$\text{Langkah II}\quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \cancel{3}\ {}^{0} & \cancel{3}\ \tfrac{3}{2} & \cancel{1}\ \tfrac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \cancel{?2}\ {}^{1} & \cancel{?3}\ \tfrac{3}{2} & \cancel{0}\ \tfrac{?1}{?} & 1 & 0 \\ 0 & \cancel{1}\ 0 & \cancel{1}\ \tfrac{1}{2} & \cancel{1}\ \tfrac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\text{Langkah III}\quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \cancel{\tfrac{?3}{2}} & \cancel{1} & \cancel{\tfrac{3}{2}} & \cancel{0} \\ 0 & 1 & \cancel{\tfrac{3}{2}} & \cancel{0} & \cancel{\tfrac{?1}{2}} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & \cancel{\tfrac{?1}{2}} & \cancel{1} & \cancel{\tfrac{1}{2}} & \cancel{1} \end{array}\right) \quad \text{jadi } A^{-1} = \begin{pmatrix} ?2 & 0 & ?3 \\ 3 & 1 & 3 \\ ?2 & ?1 & ?2 \end{pmatrix}$$

PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINIER DENGAN MENGGUNAKAN MATRIKS

Teorema. (Aturan Cramer) jika AX = B adalah sistem yang terdiri dari n persamaan linier dalam n bilangan tidak diketahui sehingga det(A) ? 0, maka sistem tersebut mempunyai pemecahan yang unik. Pemecahan ini adalah:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)},\ x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)},\ \ldots,\ x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

di mana A_j adalah matriks yang kita dapatkan dengan menggantikan entri-entri dalam kolom ke j dari A dengan entri-entri dalam matriks.

Dari teorema di atas, dapat dijelaskan penyelesaian sistem persamaan linier sebagai berikut:

Sistem Persamaan Linier Dua Variabel

Misalkan diketahui sistem persamaan linier dengan dua variabel

ax + by = p × d adx + bdy = pd

cx + dy = q   × b   bcx + bdy = bq

(ad-bc)x = pd – bq

$$x = \frac{pd - bq}{ad - bc}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{\Delta x}{\Delta}$$

sedangkan untuk mencari nilai variabel y, dicari dengan cara seperti di atas yaitu.

ax + by = p   × c   acx + bcy = cp

cx + dy = q   × a   acx + ady = aq

(bc-ad)x = cp – aq

$$y = \frac{aq - cp}{ad - bc}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{\Delta y}{\Delta}$$

$\Delta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ disebut determinan utama

Contoh 8

Selesaikan sistem persamaan berikut:

a). 3x + 4y = 7   b) $3x_1 - 4x_2 = -5$

5x – 2y = 3 $2x_1 + x_2 = 4$

Jawab:

a) $$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-26}{-26} = 1$$

$$y = \frac{?y}{y} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & ?2 \end{vmatrix}} = \frac{?26}{?26} = 1$$

Jadi nilai x dan y berturut-turut adalah 1 dan 1.

b) x_1 = ...

x_2 = ...

Sistem Persamaan Linier Tiga Variabel

Misalkan diketahui sistem persamaan linier tiga variabel

ax + by + cz = p

dx + ey + fz = q

gx + hz + iz = r

$$? = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$ disebut determinan utama

$$?x = \begin{vmatrix} p & b & c \\ q & e & f \\ r & h & i \end{vmatrix} \; ; \; ?y = \begin{vmatrix} a & p & c \\ d & q & f \\ g & r & i \end{vmatrix} \; ; \; ?z = \begin{vmatrix} a & b & p \\ d & e & q \\ g & h & r \end{vmatrix}$$

$$x = \frac{?x}{x} \; ; \; y = \frac{?y}{y} \; ; \; z = \frac{?z}{z}$$

<u>**Contoh 9**</u>

1. Selesaikan sistem persamaan berikut:

   2x + 3y – z = -7

   x - y + z = 6

   3x + y – 2z = -5

   <u>**Jawab:**</u>

   $$? = \begin{vmatrix} 2 & 3 & ?1 \\ 1 & ?1 & 1 \\ 3 & 1 & ?2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} ?1 & 1 \\ 1 & ?2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & ?2 \end{vmatrix} -1\begin{vmatrix} 1 & ?1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

   = 2 (1) –3 (-5) –1(4)

   = 2 + 15 – 4

   = 13

$$? x = \begin{vmatrix} ?7 & 3 & ?1 \\ 6 & ?1 & 1 \\ ?5 & 1 & ?2 \end{vmatrix} = -7 \begin{vmatrix} ?1 & 1 \\ 1 & ?2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ ?5 & ?2 \end{vmatrix} -1 \begin{vmatrix} 6 & ?1 \\ ?5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -7\ (1) – 3\ (-7) – 1(1)$$

$$= -7 + 21 – 1$$

$$= 13$$

$$? y = \begin{vmatrix} 2 & ?7 & ?1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 3 & ?5 & ?2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ ?5 & ?2 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & ?2 \end{vmatrix} -1 \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & ?5 \end{vmatrix}$$

$$= 2\ (-7) + 7\ (-5) – 1(-23)$$

$$= -14 - 35 + 23$$

$$= -26$$

$$? z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & ?7 \\ 1 & ?1 & 6 \\ 3 & 1 & ?5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} ?1 & 6 \\ 1 & ?5 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & ?5 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 1 & ?1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\ (-1) – 3\ (-23) + 7(4)$$

$$= -2 + 69 - 28$$

$$= 39$$

$$x = \frac{?x}{x} = \frac{13}{13}\ ;\ \ y = \frac{?y}{y} = \frac{?\,26}{13} = -2\ \ ;\ z = \frac{?y}{y} = \frac{39}{13} = 3$$

Jadi HP { 1, -2, 3 }

2. Selesaikan sistem persamaan berikut:

$x_1 + 2x_3 = 6$

$-3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 30$

$-x_1 – 2x_2 + 3x_3 = 8$

<u>**Jawab:**</u>

? = ...

$? x_1$ = ...

$? x_2$ = ...

$? x_3$ = ...

$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}$ = ……….. ; $x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}$ = ……….. ; $x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}$ = ………..

HP { x_1=…., x_2= …, x_3= …)

c. Rangkuman 2

1. det(A) = det $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ = $a_{11}a_{22}$ + ($-a_{21}a_{22}$) = $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{22}$

   det(B) = det $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ = $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$

   $- a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$
2. A adalah matriks persegi, maka minor entri a_{ij} dinyatakan oleh M_{ij} dan didefinisikan menjadi determinan submatriks yang tetap setelah baris ke *i* dan kolom ke *j* dicoret dari A. bilangan $(-1)^{i+j}$ M_{ij} dinyatakan oleh C_{ij} dan dinamakan kofaktor entri a_{ij}.
3. Jika A adalah suatu matriks n x n dan Cij adalah kofakor aij, maka matriks $\begin{bmatrix} C11 & C12 & \cdots & C1n \\ C21 & C22 & \cdots & C2n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Cn1 & Cn2 & \cdots & Cnn \end{bmatrix}$ dinamakan matriks kofaktor A. Tranpose matriks ini dinamakan adjoin A dan dinyatakan dengan adj(A).
4. $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}$ adj(A)
5. jika AX = B adalah sistem yang terdiri dari n persamaan linier dalam n bilangan tidak diketahui sehingga det(A) $\neq 0$, maka sistem tersebut mempunyai pemecahan yang unik. Pemecahan ini adalah

   $x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}$, $x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}$, … ,$x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$

   di mana A_j adalah matriks yang kita dapatkan dengan menggantikan entri-entri dalam kolom ke j dari A dengan entri-entri dalam matriks.

d. Tugas Latihan 2

1. A = $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ tentukan det (A) dan invers matriks A?

2. A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, hitung det(A)

3. Carilah invers dari matriks A = $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

4. Tentukan penyelesaian dari persamaan linier berikut ini dengan menggunakan determinan:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}$$

5. Tentukan persamaan matriksnya:
   a. Jika diketahui a = -3x + y ; b + x = 0!
   b. Jika diketahui –3x –y = a ; x = b!

e. Kunci Tugas 2

1. det(A) = 10 – 9 = 1 ,

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

2. A = $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, det(A) = $3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$

= 3 (1-0) + 2(1-2) - 4 (0-2)

= 3 – 2 + 8

= 9

3. Untuk menghitung invers dari matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, kita hitung dulu det(A)

$\det(A) = 1\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$

= 1(6) – (-6) + 3(-2)

= 6 + 6 - 6

= 6

kofaktor A adalah

$C_{11} = 6$	$C_{12} = -3$	$C_{13} = -2$
$C_{21} = -6$	$C_{22} = 3$	$C_{23} = 0$
$C_{31} = 9$	$C_{32} = -3$	$C_{33} = -2$

matriks kofaktor A adalah: $\begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ -6 & 3 & 0 \\ 9 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ dan adj(A) =

$\begin{pmatrix} 6 & -6 & 9 \\ -3 & 3 & -3 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Jadi $A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & -6 & 9 \\ -3 & 3 & -3 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, sederhanakan sendiri.

4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3-2 = 1$; $\Delta x = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 11 & 3 \end{vmatrix} = 21-22 = -1$; $\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 11 \end{vmatrix} = 11-7 = 4$

$x = \Delta x/\Delta = \frac{-1}{1} = 1$; $y = \Delta y/\Delta = \frac{4}{1} = 4$

5. a) a = -3x + y ; b + x = 0, maka persamaan matriksnya adalah:

$\begin{pmatrix} -3x + y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$

b) –3x –y = a ; x = b ;maka persamaan matriksnya adalah

$$\begin{pmatrix} -3x - y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

f. Tes Formatif

1. Tentukanlah determinan dari matriks berikut ini:

   a) $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

2. Jika diketahui P = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ dan Q = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, maka tentukanlah

   invers dari matriks P atau P^{-1} dan Q^{-1}!

3. Diberikan dua buah matriks yaitu:

   A = $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ dan B = $\begin{pmatrix} a & c \\ -b & d \end{pmatrix}$

   Jika $A^{-1} = B^T$, maka tentukanlah nilai dari a, b, c dan d!

4. Tentukan penyelesaian dari persamaan linier berikut ini:

   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

5. Tentukan persamaan matriksnya kemudian selesaikan:

   a. Jika diketahui a = -3x + y ; b + x = 0 tentukan nilai x dan y!

   b. Jika diketahui –3x –y = a ; x = b tentukan nilai x dan y!

g. Kunci Jawaban Formatif

1. a) det $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$ = 15 – 0 = 15

b) det $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

$= 2(6-2) - 3(3-4) + 4(1-4)$

$= 2(4) - 3(-1) + 4(-3)$

$= 8 + 3 - 12$

$= -1$

2. $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ dan $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$; det $P = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5-4 = 1$, maka:

$P^{-1} = \dfrac{1}{\det P}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{1}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$; det $Q = 1\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.4 - 0 + 4.(-3) = -8$

$Q^{-1} = \dfrac{1}{\det Q}\,\text{adj}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$; karena matriks kofaktornya adalah

$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -4 & 5 & 1 \\ -8 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ maka adj $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -8 \\ 1 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$Q^{-1} = \dfrac{1}{-8}\begin{bmatrix} 4 & -4 & -8 \\ 1 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{8} & -\frac{5}{8} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$

3. $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{1}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} a & c \\ -b & d \end{bmatrix}$ maka $B^T = \begin{bmatrix} a & -b \\ c & d \end{bmatrix}$

Karena $A^{-1} = B^T$ maka: $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ c & d \end{pmatrix}$

Sehingga:

$a = -2$, $-b = -\frac{1}{5} \Leftrightarrow b = \frac{1}{5}$, $c = -5$ dan $d = 3$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3-0 = 3$; $\Delta x = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 9-0 = 9$; $\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4-6 = -2$

$x = \Delta x/\Delta = \frac{-1}{1} = 1$; $y = \Delta y/\Delta = \frac{4}{1} = 4$

5. a) $a = -3x + y$; $b + x = 0$, maka persamaan matriksnya adalah:

$\begin{pmatrix} -3x + y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$

b) $-3x - y = a$; $x = b$;maka persamaan matriksnya adalah:

$\begin{pmatrix} -3x - y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

BAB III. EVALUASI

A. Tes Tertulis

Jawablah pertanyaan di bawah ini dengan singkat dan jelas!

1. Jelaskan apa yang dimaksud pengertian di bawah ini, kemudian berikan masing-masing contohnya!:
   a) Matriks Baris.
   b) Matriks Segitiga Atas.
   c) Matriks Diagonal.
   d) Matriks Identitas.
2. Diketahui persamaan matriks sebagai berikut:
   $\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -4 & 23 \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; tentukanlah nilai p dan q!.
3. Diberikan A = $\begin{pmatrix} 2x & 3 \\ 3 & x \end{pmatrix}$ dan B = $\begin{pmatrix} x & -1 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$, tentukanlah nilai dari x jika det (A) = det (B)!.
4. Jika matriks $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & x & 5 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ adalah matriks singular, maka tentukan nilai dari x!.
5. Matriks P = $\begin{pmatrix} 5 & a \\ 3b & 5c \end{pmatrix}$ dan Q = $\begin{pmatrix} 2a-2 & a-8 \\ a-4 & 3a-b \end{pmatrix}$. Tentukan nilai dari c, jika 2P = Q^T !.
6. Diketahui: $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, maka hasil dari: $a^2 + b^2$ adalah.....
7. Diketahui A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ dan $A^2 + xA + yI = 0$; dimana I = matriks identitas dan x,y bilangan bulat. Tentukan nilai x dan y!.

B. Kunci Jawaban Tes Tertulis

1. a) Matriks Baris adalah matriks yang mempunyai tepat satu baris, contoh: $\begin{bmatrix} a & b & 1 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 6 & 5 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

   b) Matriks Segitiga Atas adalah matriks persegi yang bagian bawah dari diagonal utama, elemennya nol.

   Contoh: $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

   c) Matriks Diagonal adalah matriks persegi yang elemen diagonal utamanya sembarang dan elemen lainnya nol.

   Contoh: $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix}$

   d) Matriks Identitas adalah matriks persegi yang elemen diagonal utamanya satu dan elemen lainnya nol.

   Contoh: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Persamaan matriks pada soal dapat berubah menjadi:

   $$\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ -4 & 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3p & -3p \\ 2p & -5p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}$$

   $$\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ -4 & 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3p + q & -3p \\ 2p & -5p + q \end{bmatrix}$$

   sehingga:

   $2p = -4 \Rightarrow p = -2$

   $3p + q = 7 \Rightarrow 3(-2) + q = 7 \Rightarrow q = 7 + 6 = 13$

   Jadi nilai p dan q berturut-turut adalah –2 dan 13.

3. Diketahui:

$A = \begin{pmatrix} 2x & 3 \\ 3 & x \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$

Det (A) = det (B)

$\Leftrightarrow$ 2x . x – 3.3 = x.10 –(-1.3)

$\Leftrightarrow$ $2x^2 - 9 = 10x + 3$

$\Leftrightarrow$ $2x^2 - 10x - 12 = 0$

$\Leftrightarrow$ $x^2 - 5x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow$ (x - 2)(x – 3) = 0

$\Leftrightarrow$ x = 2 atau x = 3

4. Diketahui:

$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & x & 5 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ adalah matriks singular.

Akibatnya: det $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & x & 5 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 0$

$3\begin{vmatrix} x & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & x \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ = 3(2x – 10)-4(4-15)+(4-3x)

0 = 6x – 30 + 44 + 4 –3x

0 = 3x – 18

18 = 3x

6 = x

Jadi nilai x adalah 6.

5. Diketahui:

$P = \begin{pmatrix} 5 & a \\ 3b & 5c \end{pmatrix}$ dan $Q = \begin{pmatrix} 2a ? 2 & a ? 8 \\ a ? 4 & 3a ? b \end{pmatrix}$

$2P = Q^T$, tentukan: c!

$$2\begin{bmatrix} 5 & a \\ 3b & 5c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a + 2 & a + 4 \\ a + 8 & 3a - b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 2a \\ 6b & 10c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a + 2 & a + 4 \\ a + 8 & 3a - b \end{bmatrix}$$

sehingga:

10c = 3a – b ....(1)

2a = a + 4 $\Rightarrow$ a = 4

6b = a + 8 $\Rightarrow$ 6b = (4) + 8 = 12 $\Rightarrow$ b = 2

Karena a = 4 dan b= 2, maka pada persamaan (1):

10c = 3(4) – 2

10c = 12 –2 = 10

c = 1

Jadi nilai c adalah 1.

6. Diketahui:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y \\ y - x \end{bmatrix}$; sehingga: a = (x-y) dan b = (y-x)

maka: $a^2 + b^2 = (x-y)^2 + (-(x-y))^2 = (x-y)^2 + (x-y)^2 = 2(x-y)^2$

7. Diketahui:

A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ dan $A^2 + xA + yI = 0$. Tentukan nilai x dan y!

Jawab:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -20 & 5 \end{bmatrix}$$

$$xA = x\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & x \\ -4x & 3x \end{bmatrix}$$

$yI = y\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$; sehingga:

$A^2 + xA + yI = 0 = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 20 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x & x \\ 4x & 3x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$

Maka: 0 + x + 5 = 0 ? x = -5

Untuk x= -5, y + 2x + 0 = 0 ? **y = 0 –2(-5) + 0 = 10**

Jadi nilai x dan y adalah –5 dan 10.

BAB IV. PENUTUP

Setelah menyelesaikan modul ini, anda berhak untuk mengikuti tes praktek untuk menguji kompetensi yang telah anda pelajari. Apabila anda dinyatakan memenuhi syarat kelulusan dari hasil evaluasi dalam modul ini, maka anda berhak untuk melanjutkan ke topik/modul berikutnya.

Mintalah pada guru untuk uji kompetensi dengan sistem penilaian yang dilakukan langsung oleh pihak industri atau asosiasi yang berkompeten apabila anda telah menyelesaikan seluruh evaluasi dari setiap modul, maka hasil yang berupa nilai dari guru atau berupa portofolio dapat dijadikan bahan verifikasi oleh pihak industri atau asosiasi profesi. Kemudian selanjutnya hasil tersebut dapat dijadikan sebagai penentu standar pemenuhan kompetensi dan bila memenuhi syarat anda berhak mendapatkan sertifikat kompetensi yang dikeluarkan oleh dunia industri atau asosiasi profesi.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard. 1983. *Aljabar Linier Elementer*. Jakarta: Erlangga

Elizabeth, M.. 1989. *Pedoman Pemecahan Aljabar Linier Untuk Mahasiswa*. Jakarta: Erlangga.

Suherman, Erman dkk. 2003. *Strategi Pembelajaran Kontemporer*. Bandung: JICA-IMSTEP.

Sembiring, Suwah. 1996. *Kumpulan soal dan pembahasan UMPTN 1992-1996 Rayon A, B, C.* Bandung: Ganesha Operation.