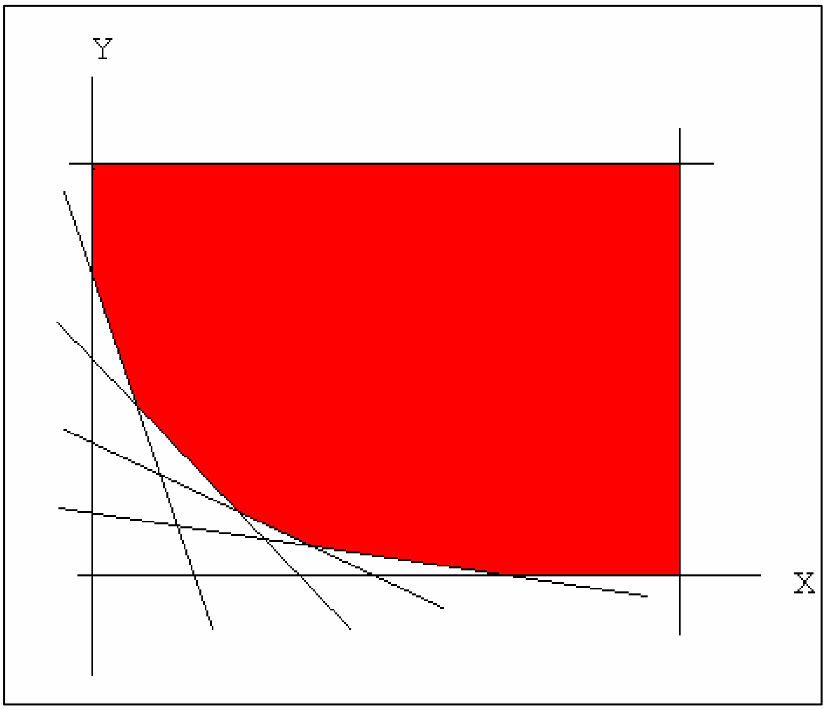
KODE MAT. 14

PROGRAM LINEAR

BAGIAN PROYEK PENGEMBANGAN KURIKULUM
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH KEJURUAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
2004

Kode MAT.14

Program Linear



BAGIAN PROYEK PENGEMBANGAN KURIKULUM
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH KEJURUAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
2004

Kode MAT.14

Program Linear

Penyusun:

Drs. Mega Teguh Budiarto, MPd.

Editor:
Dr. Manuharawati, MSi.
Dra. Kusrini, M.Pd.

BAGIAN PROYEK PENGEMBANGAN KURIKULUM
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH KEJURUAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
2004

Kata Pengantar

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa atas karunia dan hidayah-Nya, kami dapat menyusun bahan ajar modul manual untuk SMK Bidang Adaptif, yakni mata-pelajaran Fisika, Kimia dan Matematika. Modul yang disusun ini menggunakan pendekatan pembelajaran berdasarkan kompetensi, sebagai konsekuensi logis dari Kurikulum SMK Edisi 2004 yang menggunakan pendekatan kompetensi *(CBT: Competency Based Training).*

Sumber dan bahan ajar pokok Kurikulum SMK Edisi 2004 adalah modul, baik modul manual maupun interaktif dengan mengacu pada Standar Kompetensi Nasional (SKN) atau standarisasi pada dunia kerja dan industri. Dengan modul ini, diharapkan digunakan sebagai sumber belajar pokok oleh peserta diklat untuk mencapai kompetensi kerja standar yang diharapkan dunia kerja dan industri.

Modul ini disusun melalui beberapa tahapan proses, yakni mulai dari penyiapan materi modul, penyusunan naskah secara tertulis, kemudian disetting dengan bantuan alat-alat komputer, serta divalidasi dan diujicobakan empirik secara terbatas. Validasi dilakukan dengan teknik telaah ahli (*expert-judgment*), sementara ujicoba empirik dilakukan pada beberapa peserta diklat SMK. Harapannya, modul yang telah disusun ini merupakan bahan dan sumber belajar yang berbobot untuk membekali peserta diklat kompetensi kerja yang diharapkan. Namun demikian, karena dinamika perubahan sain dan teknologi di industri begitu cepat terjadi, maka modul ini masih akan selalu dimintakan masukan untuk bahan perbaikan atau direvisi agar supaya selalu relevan dengan kondisi lapangan.

Pekerjaan berat ini dapat terselesaikan, tentu dengan banyaknya dukungan dan bantuan dari berbagai pihak yang perlu diberikan penghargaan dan ucapan terima kasih. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini tidak berlebihan bilamana disampaikan rasa terima kasih dan penghargaan yang sebesar-besarnya kepada berbagai pihak, terutama tim penyusun modul (penulis, editor, tenaga komputerisasi modul, tenaga ahli desain grafis) atas dedikasi, pengorbanan waktu, tenaga, dan pikiran untuk menyelesaikan penyusunan modul ini.

Kami mengharapkan saran dan kritik dari para pakar di bidang psikologi, praktisi dunia usaha dan industri, dan pakar akademik sebagai bahan untuk melakukan peningkatan kualitas modul. Diharapkan para pemakai berpegang pada azas keterlaksanaan, kesesuaian dan fleksibilitas, dengan mengacu pada perkembangan IPTEK pada dunia usaha dan industri dan potensi SMK dan dukungan dunia usaha industri dalam rangka membekali kompetensi yang terstandar pada peserta diklat.

Demikian, semoga modul ini dapat bermanfaat bagi kita semua, khususnya peserta diklat SMK Bidang Adaptif untuk mata-pelajaran Matematika, Fisika, Kimia, atau praktisi yang sedang mengembangkan modul pembelajaran untuk SMK.

Jakarta, Desember 2004
a. n. Direktur Jenderal Pendidikan
Dasar dan Menengah
Direktur Pendidikan Menengah Kejuruan,

Dr. Ir. Gatot Hari Priowirjanto, M. Sc.
NIP 130 675 814

DAFTAR ISI

- Halaman Sampul i
- Halaman Francis ii
- Kata Pengantar iii
- Daftar Isi v
- Peta Kedudukan Modul.. vii
- Daftar Judul Modul viii
- Glossary x

I. PENDAHULUAN

A. Deskripsi 1
B. Prasyarat 1
C. Petunjuk Penggunaan Modul.. 2
D. Tujuan Akhir 2
E. Kompetensi.. 4
F. Cek Kemampuan 5

II. PEMBELAJARAN

A. Rencana Belajar Peserta Diklat 8

B. Kegiatan Belajar 9

1. Kegiatan Belajar 1.. 9

a. Tujuan Kegiatan Pembelajaran 9
b. Uraian Materi.. 9
c. Rangkuman 20
d. Tugas 21
e. Kunci Jawaban Tugas 22
f. Tes Formatif.. 23
g. Kunci Jawaban Tes Formatif 24

2. Kegiatan Belajar 2 26

a. Tujuan Kegiatan Pembelajaran 26
b. Uraian Materi.. 26
c. Rangkuman 32
d. Tugas 33
e. Kunci Jawaban Tugas 34
f. Tes Formatif.. 36
g. Kunci Jawaban Tes Formatif 38

3. Kegiatan Belajar 3 41
a. Tujuan Kegiatan Pembelajaran 41
b. Uraian Materi 41
c. Rangkuman 47
d. Tugas 47
e. Kunci Jawaban Tugas 48
f. Tes Formatif 51
g. Kunci Jawaban Tes Formatif 52

4. Kegiatan Belajar 4 55
a. Tujuan Kegiatan Pembelajaran 55
b. Uraian Materi 55
c. Rangkuman 61
d. Tugas 61
e. Kunci Jawaban Tugas 62
f. Tes Formatif 66
g. Kunci Jawaban Tes Formatif 67

III. EVALUASI 70

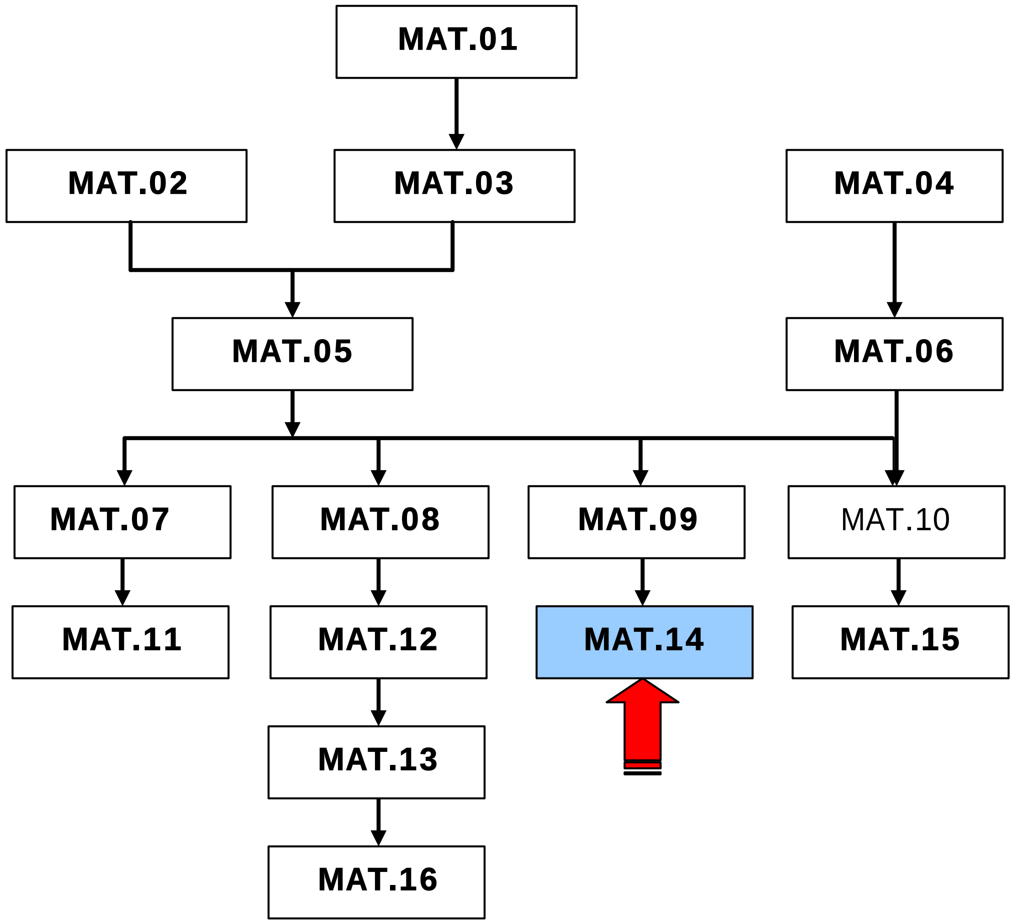
A. Soal Tes Tertulis 70

B. Kunci Jawaban Tes Tertulis 71

IV. PENUTUP 73

DAFTAR PUSTAKA 74

PETA KEDUDUKAN MODUL



Daftar Judul Modul

No.	Kode Modul	Judul Modul
1	MAT.01	Matrik
2	MAT.02	Logika Matematika
3	MAT.03	Persamaan dan Pertidaksamaan
4	MAT.04	Geometri Dimensi Dua
5	MAT.05	Relasi Dan Fungsi
6	MAT.06	Geometri Dimensi Tiga
7	MAT.07	Peluang
8	MAT.08	Bilangan Real
9	MAT.09	Trigonometri
10	MAT.10	Irisan Kerucut
11	MAT.11	Statistika
12	MAT.12	Barisan
13	MAT.13	Aproksimasi Kesalahan
14	MAT.14	Program Linier
15	MAT.15	Vektor
16	MAT.16	Matematika Keuangan

Glossary

ISTILAH	KETERANGAN
Program linier	Jika terdapat tujuan yang dicapai, dan dalam model matematika fungsi tujuan.
Pertidaksamaan linier	Jika terdapat sumber daya atau *masukan (input)* yang berada dalam keadaan ***terbatas***, dapat dirumuskan dalam hubungan yang linear yaitu *pertidaksamaan linear.*
Pola umum masalah yang dapat dimodelkan dengan program linier	Pola umum masalah yang dapat dimodelkan dengan program linier harus memenuhi syarat: a. adanya pilihan kombinasi beberapa faktor kegiatan, b. adanya sumber penunjang beserta batasnya, c. adanya fungsi obyektif/sasaran/tujuan yang harus dioptimumkan. d. bahwa relasi yang timbul antara faktor-faktor semuanya linier.
Model matematika	Model matematika dari masalah program linier disajikan dalam bentuk: Carilah x dan y sehingga memaksimumkan/meminimumkan fungsi tujuan $f = ax + by$.

BAB I. PENDAHULUAN

A. Deskripsi

Dalam modul ini anda akan mempelajari 4 Kegiatan Belajar. Kegiatan Belajar 1 adalah **Sistem Pertidaksamaan Linier**, Kegiatan Belajar 2 adalah **Model Matematika,** Kegiatan Belajar 3 **Nilai Optimum,** dan Kegiatan Belajar 4 adalah **Penggunaan Garis Selidik**. Dalam Kegiatan Belajar 1, akan diuraikan mengenai pengertian program linier, menyelesaikan sistem pertidaksamaan linier dengan dua variabel, dan menentukan titik optimum dari daerah himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan linier dengan dua variabel. Dalam Kegiatan Belajar 2, akan diuraikan pengertian model matematika dan pengubahan soal verbal kedalam bentuk model matematika. Dalam kegiatan belajar 3 akan dibicarakan penentuan fungsi obyektif, penentuan daerah penyelesaian, dan penyelesaian fungsi optimum dari fungsi obyektif. Dalam kegiatan belajar 4 akan dibicarakan pengertian garis selidik, menggunakan garis selidik menggunakan fungsi tujuan, dan menentukan nilai optimum.

B. Prasyarat

Prasyarat untuk mempelajari modul ini adalah membuat grafik dari garis, menyelesaikan sistem persamaan linier dengan dua variabel dan untuk program linier dengan tiga atau lebih variabel digunakan matriks. Materi tersebut sudah Anda pelajari di modul matriks dan modul persamaan dan pertidaksamaan.

C. Petunjuk Penggunaan Modul

1. Pelajari daftar isi serta skema kedudukan modul dengan cermat dan teliti karena dalam skema modul akan nampak kedudukan modul yang sedang Anda pelajari ini antara modul-modul yang lain.
2. Perhatikan langkah-langkah dalam melakukan pekerjaan dengan benar untuk mempermudah dalam memahami suatu proses pekerjaan, sehingga diperoleh hasil yang optimal.
3. Pahami setiap teori dasar yang akan menunjang penguasaan materi dengan membaca secara teliti. Bilamana terdapat evaluasi maka kerjakan evaluasi tersebut sebagai sarana latihan.
4. Jawablah tes formatif dengan jawaban yang singkat dan jelas serta kerjakan sesuai dengan kemampuan Anda setelah mempelajari modul ini.
5. Bila terdapat penugasan, kerjakan tugas tersebut dengan baik dan bila perlu konsultasikan hasil penugasan tersebut kepada guru/instruktur.
6. Catatlah semua kesulitan anda dalam mempelajari modul ini untuk ditanyakan pada guru/instruktur pada saat tatap muka. Bacalah referensi lain yang ada hubungan dengan materi modul ini agar Anda mendapatkan pengetahuan tambahan.

D. Tujuan Akhir

Setelah mempelajari modul ini diharapkan Anda dapat:

1. Memahami pengertian program linier.
2. Menyelesaikan sistem pertidaksamaan linier dengan dua variabel.
3. Menentukan titik optimum dari daerah himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan linier dengan dua variabel.
4. Memahami pengertian model matematika.
5. Mengubah soal verbal kedalam bentuk model matematika.
6. Menentukan fungsi obyektif.

7. Menentukan daerah penyelesaian.
8. Menyelesaikan fungsi optimum dari fungsi obyektif.
9. Memahami pengertian garis selidik.
10. Membuat garis selidik menggunakan fungsi tujuan.
11. Menentukan nilai optimum.

E. Kompetensi

KOMPETENSI : GEOMETRI DIMENSI DUA
PROGRAM KEAHLIAN : program adaktif
KODE : MATEMATIKA/MAT 14
DURASI PEMBELAJARAN : 42 Jam @ 45 menit

SUB KOMPETENSI	KRITERIA KINERJA	LINGKUP BELAJAR	MATERI POKOK PEMELAJARAN		
			SIKAP	PENGETAHUAN	KETERAMPILAN
1. Membuat grafik himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan linear	✍ Daerah himpunan penyelesai-an ditentukan dari sistem pertidaksamaan linear dengan 2 variabel	✍ Grafik himpunan penye-lesaian sistem pertidak-samaan linear dengan 2 variabel	✍ Efektif dan efisien dalam menyelesaikan masalah dengan menggunakan program linear	✍ Pengertian program linear ✍ Himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan linear dengan 2 variabel ✍ Titik optimum dari daerah himpunan penye-lesaian sistem pertidak-samaan linear	✍ Menggambar grafik ✍ Membuat model mate-matika. ✍ Menentukan nilai optimum. ✍ Penggunaan garis selidik.
2. Menentukan model matematika dari soal cerita (kalimat verbal)	✍ Model matematika disusun dari soal ceritera (kalimat verbal)	✍ Model matematika	✍ Efektif dan efisien dalam menyelesaikan masalah dengan meng-gunakan program linear	✍ Pengertian model mate-matika ✍ Pengubahan soal verbal kedalam bentuk model matematika	
3. Menentukan nilai optimum dari sistem pertidaksamaan linear.	✍ Nilai optimum ditentukan berdasar fungsi obyektif dan sistem pertidaksamaannya dengan menggunakan titik pojoknya.	✍ Fungsi objektif ✍ Nilai optimum	✍ Efektif dan efisien dalam menyelesaikan masalah dengan meng-gunakan program linear	✍ Penentuan fungsi objektif ✍ Penentuan daerah penye-lesaian ✍ Penyelesaian nilai optimum dari fungsi obyektif	
4. Menerapkan garis selidik	✍ Nilai optimum ditentukan dengan menggunakan garis selidik	✍ Garis selidik	✍ Efektif dan efisien dalam menyelesaikan masalah dengan meng-gunakan program linear	✍ Pengertian garis selidik ✍ Pembuatan garis selidik menggunakan fungsi objektif ✍ Penentuan nilai optimum	

F. Cek kemampuan

Kerjakanlah soal-soal berikut ini. Jika anda merasa dapat mengerjakan semua soal berikut ini, maka Anda dapat langsung mengerjakan soal-soal Evaluasi pada BAB III.

1. Apakah syarat suatu masalah merupakan masalah program linier.
   Gambar daerah pemecahan pertidaksamaan
   a) 2x - 2y ? 6
   b) 2x - 5y ? 10
   c) x ? 0 dan y ? 0
2. Gambar daerah yang memenuhi sistem pertidaksamaan dan carilah koordinat titik-titik sudut yang terbentuk
   a) x + y ? 4
   b) x + 2y ? 6
   c) x ? 0 dan y ? 0
3. Gambar daerah yang memenuhi sistem pertidaksamaan dan carilah koordinat titik-titik sudut yang terbentuk
   a) x + 2y ? 4
   b) 3x + y ? 6
   c) x ? 0 dan y ? 0
4. Gambar daerah yang memenuhi sistem pertidaksamaan dan carilah koordinat titik-titik sudut yang terbentuk
   a) x + 2y ? 8
   b) 2x + y ? 8
   c) x ? 0 dan y ? 0
5. Gambar daerah yang memenuhi sistem pertidaksamaan dan carilah koordinat titik-titik sudut yang terbentuk
   a) 3x + 4y ? 12
   b) 5x + 6y ? 30
   c) x ? 0 dan y ? 0

6. Diberikan masalah sebagai berikut:

   Untuk membuat satu adonan roti jenis A Ibu memerlukan terigu 400 gram dan mentega 50 gram. Untuk membuat satu adonan roti jenis B diperlukan terigu 200 gram dan mentega 100 gram. Bahan yang tersedia adalah terigu 6 kg dan mentega 2,4 kg. Jika satu roti jenis A mendapatkan keuntungan Rp 1.000,00 dan satu roti jenis B mendapatkan keuntungan Rp 2.000,00, tentukan banyaknya roti jenis A dan B yang harus dibuat Ibu agar untung sebanyak-banyaknya.

   Buatlah model matematika dari masalah di atas dengan terlebih dahulu membuat tabel untuk memudahkan dalam menjawabnya. Tentukan pula fungsi obyektifnya.

7. Diberikan masalah sebagai berikut:

   Seorang desainer akan merancang desain ruang pesawat udara. Tempat duduk dirancang tidak lebih 48 penumpang, bagasi dirancang sehingga penumpang kelas utama dapat membawa 60 kg dan penumpang kelas ekonomi membawa 20 kg. Pesawat itu hanya dapat membawa 1440 kg. Jika harga tiket kelas utama Rp 600.000,00 dan harga tiket kelas ekonomi Rp 350.000,00, berapakah banyaknya kursi kelas utama dan kelas ekonomi yang akan dirancang dalam kabin pesawat agar memperoleh pendapatan sebanyak-banyaknya.

   Buatlah model matematika dari masalah di atas dengan terlebih dahulu membuat tabel untuk memudahkan dalam menjawabnya. Tentukan pula fungsi obyektifnya.

8. Seorang alumni Tata Boga mempunyai bahan A, B dan C dengan jumlah yang tersedia berturut-turut 300 unit, 180 unit, dan 300 unit. Dengan bahan yang tersedia, alumni Tata Boga membuat dua macam roti sesuai dengan pesanan langganan. Alumni Tata Boga menetapkan keperluan bahan.

macam roti	bahan A	bahan B	bahan C
I	2	2	4
II	10	4	2

Harga roti I sebesar Rp. 350,00 dan ke II Rp. 800,00. Berapa banyak tiap macam roti harus dibuat untuk memperoleh hasil penjualan terbanyak? Berapa rupiah jumlah terbesar yang diperoleh Alumni Tata Boga?.

BAB II. PEMBELAJARAN

A. RENCANA BELAJAR SISWA

Kompetensi : Menerapkan konsep program linear

Sub Kompetensi :

- Membuat grafik himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan linier.
- Menentukan model matematika dari soal cerita (kalimat verbal).
- Menentukan nilai optimum dari sistem pertidaksamaan linier.
- Menerapkan garis selidik.

Tulislah semua jenis kegiatan yang anda lakukan di dalam tabel kegiatan di bawah ini. Jika ada perubahan dari rencana semula, berilah alasannya kemudian mintalah tanda tangan kepada guru atau instruktur anda.

Jenis Kegiatan	Tanggal	Waktu	Tempat Belajar	Alasan perubahan	Tandatangan Guru

B. KEGIATAN BELAJAR

1. Kegiatan Belajar 1: Membuat Grafik Himpunan Penyelesaian

a. Tujuan Kegiatan Pembelajaran

Setelah mempelajari kegiatan belajar ini, diharapkan anda dapat:

- ✍ Memahami pengertian program linier.
- ✍ Menentukan himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan linier dengan dua variable.

b. Uraian Materi 1

Dalam kehidupan, manusia cenderung untuk hidup berprinsip ekonomi, yaitu dengan usaha sedikit mungkin dapat memperoleh hasil sebanyak mungkin. Banyak hal yang dicari nilai optimumnya (maksimum atau minimum), di antaranya pendapatan maksimum, ongkos yang minimum, dan hidup yang paling nyaman. Hal inilah yang menimbulkan masalah optimasi.

Ide program linier pertama kali dikembangkan dalam bidang kemiliteran selama perang dunia kedua, kemudian dikembangkan di dalam bidang pemerintahan, manajeman, komersial dan perdagangan, aplikasi dalam bidang industri, dan lainnya.

Kapankah suatu masalah itu merupakan masalah program linier? Suatu masalah dikatakan masalah program linier jika memenuhi:

2. Terdapat tujuan yang dicapai, dan dalam model matematika fungsi tujuan ini dalam bentuk ***linier.***
3. Terdapat sumber daya atau *masukan (input)* yang berada dalam keadaan ***terbatas***, dapat dirumuskan dalam hubungan yang linear yaitu *pertidaksamaan linear.*

   Untuk itu perhatikan contoh sebagai berikut:

Contoh 1

Diberikan masalah sebagai berikut:

Sebuah Firma memproduksi sendiri rak buku dalam dua model, yaitu A dan B. Produksi rak buku dibatasi oleh persediaan material (papan kualitas tinggi) dan waktu yang terbatas dari mesin pemroses. Tiap unit A memerlukan 3 m^2 papan dan tiap unit B memerlukan 4 m^2 papan. Firma memperoleh 1.700 m^2 papan tiap minggu dari pemasok sendiri. Tiap unit A membutuhkan 12 menit dari mesin pemroses dan tiap unit B membutuhkan 30 menit. Setiap minggu memungkinkan total waktu mesin 160 jam. Jika keuntungan (profit) tiap unit A sebesar Rp 20.000,00 dan tiap unit B sebesar Rp 40.000,00, berapa banyak unit dari tiap model akan perusahaan rencanakan untuk produksi tiap minggu.

Apakah permasalahan di atas merupakan masalah program linier?

Dari masalah di atas ternyata:

a) Terdapat tujuan yang dicapai yaitu mencapai keuntungan maksimum melalui produksi rak buku jenis A dan B di mana tiap jenis produksi itu telah direncanakan mempunyai harga tertentu. Rak buku yang diproduksi banyaknya *tak negatif.*

b) Terdapat sumber daya atau *masukan (input)* yang berada dalam keadaan terbatas. Dalam hal ini, Firma mempunyai persediaan, melalui pemasok sendiri, yaitu tiap minggu 1700 m^2, dan waktu kerja mesin pemroses yang terbatas yaitu tiap minggu 160 jam. Jadi permasalahan di atas merupakan permasalahan program linier.

Pola umum masalah yang dapat dimodelkan dengan program linier harus memenuhi:

a) adanya pilihan kombinasi beberapa faktor kegiatan,

b) adanya sumber penunjang beserta batasnya,

c) adanya fungsi obyektif/sasaran/tujuan yang harus dioptimumkan,

d) bahwa relasi yang timbul antara faktor-faktor semuanya linier.

Sistem Pertidaksamaan Linear

Anda sudah mempelajari sebelumnya bahwa penyelesaian persamaan $a x + b y = c$ adalah himpunan pasangan (x, y), secara geometri dinyatakan dengan garis lurus.

Bagaimana kita dapat menggambar pertidaksamaan linear $ax + by$? c dan $ax + by$? c di mana a, b, dan c adalah konstanta?

Langkah-langkah menggambar pertidaksamaan $ax + by$? c adalah:

(1) buat garis $ax + by = c$, dengan terlebih dahulu mencari titik potong dengan sumbu x dan sumbu y. Atau mencari dengan tabel nilai pasangan (x,y) yang memenuhi $ax + by = c$, kemudian menghubungkan kedua titik itu setelah digambar pada bidang Cartesius.

(2) ambil titik (p,q) yang tidak terletak pada garis $ax + by = c$, (sering dipilih titik $(0,0)$ asalkan garis tersebut tidak melalui $(0,0)$, substitusikan titik tersebut pada $ax + by$? c. Jika menjadi pernyataan yang benar maka daerah dimana titik itu berada merupakan daerah selesaian $ax + by$? c.

Dengan cara yang sama anda dapat menggambar daerah penyelesaian dari $ax + by$? c.

<u>Contoh 1</u>

Gambarlah:

a. $2x + 3y = 6$

b. $2x + 3y$? 6

c. $2x + 3y$? 6

<u>Penyelesaian</u>

a. Titik potong $2x + 3y = 6$ dengan:

1) sumbu x, jika $y = 0$, maka diperoleh $2x + 3.0 = 6$ atau $2x = 6$, didapat $x = 3$. Jadi koordinat titik potong dengan sumbu x adalah $(3, 0)$.

2) sumbu y, jika $x = 0$, maka diperoleh $2.0 + 3y = 6$ atau $3y = 6$, didapat $y = 2$. Jadi koordinat titik potong dengan sumbu y adalah $(0,2)$.

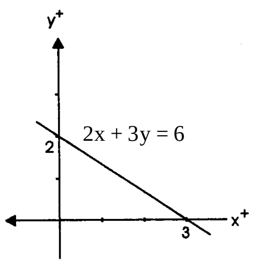
Buatlah garis melalui (3,0) dan (0,2), akan didapat gambar (I) di bawah. Jadi **penyelesaiannya adalah garis**.

b. Untuk menggambar 2x + 3y ? 6, lakukan langkah-langkah sebagai berikut:

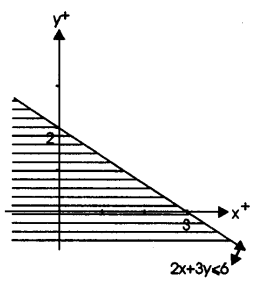
1) Gambar garis 2x + 3y = 6.
2) Selidiki daerah yang memenuhi 2x + 3y ? 6 dengan memilih suatu titik yang tidak terletak pada garis 2x + 3y = 6. Untuk itu dipilih titik (0,0).
3) Mensubstitusikan x = 0 dan y = 0 pada 2x + 3y ? 6, didapat 2.0 + 3.0? 6 atau 0 ? 6 merupakan ***pernyataan yang benar*.**
4) Memberi arsiran daerah yang memenuhi 2x + 3y ? 6 yaitu derah dimana titik (0,0) **terletak**. Setelah digambar didapat pwnyelesaian seperti gambar (II) di bawah, yaitu daerah yang diarsir.

c. Untuk menggambar 2x + 3y ? 6, lakukan langkah-langkah sebagai berikut:

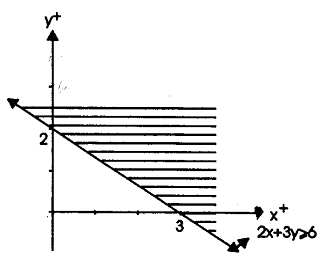
1) Gambar garis 2x + 3y = 6 seperti menyelesaikan soal (a)
2) Selidiki daerah yang memenuhi 2x + 3y ? 6 dengan memilih suatu titik yang tidak terletak pada garis 2x + 3y = 6. Untuk itu dipilih titik (0,0)
3) Mensubstitusikan x = 0 dan y = 0 pada 2x + 3y ? 6, didapat 2.0 + 3.0? 6 atau 0 ? 6 merupakan ***pernyataan yang salah*.**
4) Memberi arsiran daerah yang memenuhi 2x + 3y ? 6 yaitu daerah dimana titik (0,0) **tidak terletak**. Setelah digambar didapat penyelesaian seperti gambar (III) di bawah, yaitu **daerah** yang diarsir.



Gb. (I)



Gb. (II)



Gb. (III)

Contoh 2

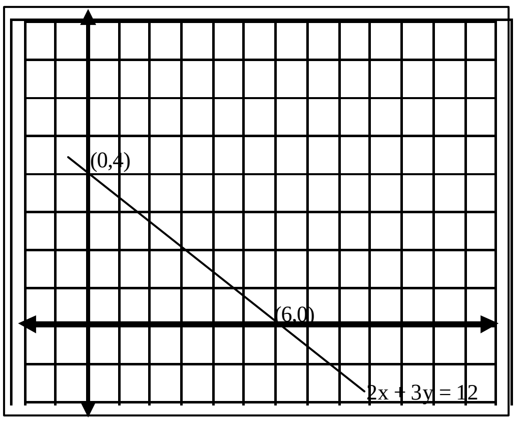
1) Cari daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan.
2) (1) $2x + 3y$? 12.
3) $3x + 2y$? 12.
4) x ? 0.
5) y ? 0.

Penyelesaian

Untuk menyelesaikan sistem pertidaksamaan di atas lakukan kegiatan berikut:

1) Menggambar garis $2x + 3y = 12$ dengan terlebih dulu mencari titik potong dengan sumbu x dan sumbu y.
2) Memotong sumbu x, jika y = 0, maka diperoleh $2x + 3.0 = 12$ atau $2x = 12$, didapat x =6. Jadi koordinat titik potong dengan sumbu x adalah A(6, 0).
3) Memotong sumbu y, jika x = 0, maka diperoleh $2.0 + 3y = 12$ atau $3y = 12$, didapat y = 4. Jadi koordinat titik potong dengan sumbu y adalah B(0,4)

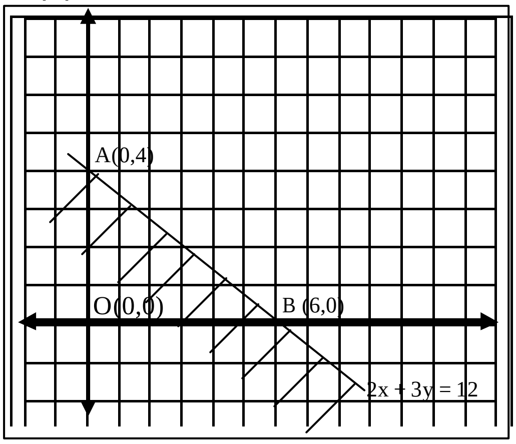
   Buatlah garis melalui (6,0) dan (0,4), akan didapat gambar (1) di bawah.



Gambar (1)

4) Pilih titik (0,0) dan substitusikan x = 0 dan y = 0 pada $2x + 3y$? 12, didapat $2.0 + 3.0$? 12 atau 0 ? 12 merupakan ***pernyataan yang benar*.**

5) Memberi arsiran daerah yang memenuhi $2x + 3y$? 12 yaitu daerah dimana titik O(0,0) **terletak**. Setelah digambar didapat penyelesaian seperti gambar (2) di bawah.

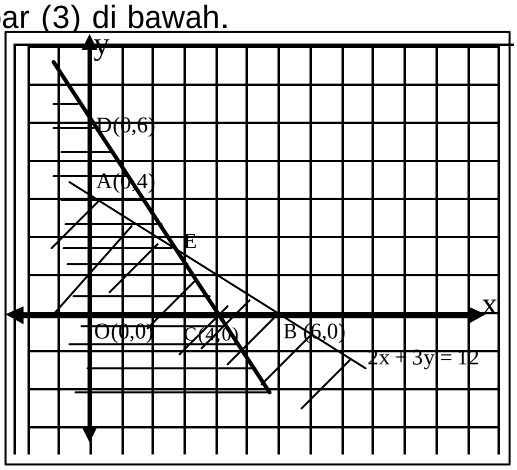


Gambar (2)

6) Gambar garis $3x + 2y$ **=** 12 melalui titik potong dengan sumbu x yaitu C(4,0) dan titik potong dengan sumbu y yaitu D(0,6). Anda coba sendiri untuk mendapatkan titik-titik potong ini dengan cara cara seperti di atas.

7) Pilih titik (0,0) dan substitusikan $x = 0$ dan $y = 0$ pada $3x + 2y$? 12, didapat 3.0 + 2.0 ? 12 atau 0 ? 12 merupakan ***pernyataan benar*.**

8) Memberi arsiran daerah yang memenuhi $3x + 2y$? 12 yaitu daerah dimana titik O(0,0) **terletak**. Setelah digambar didapat penyelesaian seperti gambar (3) di bawah.



Gambar (3)

9) Daerah yang terkena dua arsiran memenuhi $2x + 3y ? 12$ dan $3x + 2y ? 12$. Daerah yang memenuhi $x ? 0$ adalah daerah di atas sumbu x, termasuk sumbu x sendiri dan yang memenuhi $y ? 0$ dikanan sumbu y, termasuk sumbu y sendiri.

Jika titik E merupakan titik potong antara garis $3x + 2y = 12$ dengan garis $2x + 3y = 12$, maka daerah penyelesaiannya adalah daerah OCEA.

Contoh 3

Cari daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan

(1) $3x + 4y ? 12$

(2) $7x + 2y ? 14$

(3) $x ? 0$

(4) $y ? 0$

Penyelesaian

Untuk menyelesaikan sistem pertidaksamaan di atas lakukan kegiatan berikut:

1) Menggambar garis $3x + 4y = 12$ dengan terlebih dulu mencari titik potong dengan sumbu x dan sumbu y.
2) Memotong sumbu x, jika $y = 0$, maka diperoleh $3x + 4y = 12$ atau $3x = 12$, didapat $x = 4$. Jadi koordinat titik potong dengan sumbu x adalah A(6, 0).
3) Memotong sumbu y, jika $x = 0$, maka diperoleh $3.0 + 4y = 12$ atau $4y = 12$, didapat $y = 3$. Jadi koordinat titik potong dengan sumbu y adalah B(0,3). Buatlah garis melalui A(4,0) dan B(0,3).
4) Pilih titik (0,0) dan substitusikan $x = 0$ dan $y = 0$ pada $3x + 4y ? 12$, didapat $3.0 + 2.0 ? 12$ atau $0 ? 12$ merupakan ***pernyataan benar*.** Arsirlah daerah yang memuat titik (0,0). Daerah itu merupakan penyelesaian dari $3x + 4y ? 12$.
5) Menggambar garis $7x + 2y = 14$ dengan terlebih dulu mencari titik potong dengan sumbu x dan sumbu y.

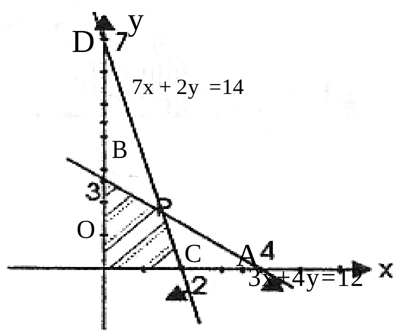
6) Memotong sumbu x, jika y = 0, maka diperoleh 7x + 2y =14 atau 7x = 14, didapat x = 2. Jadi koordinat titik potong dengan sumbu x adalah C(2, 0).

7) Memotong sumbu y, jika x = 0, maka diperoleh 7x + 2y =14 atau 2y = 14, didapat y = 7. Jadi koordinat titik potong dengan sumbu y adalah D(0,7). Buatlah garis melalui C(2,0) dan D(0,7).

8) Pilih titik (0,0) dan substitusikan x = 0 dan y = 0 pada 7x + 2y ? 14, didapat 7.0 + 2.0? 14 atau 0 ? 14 merupakan ***pernyataan benar*.** Arsirlah daerah yang memuat titik (0,0). Daerah itu merupakan penyelesaian dari 7x + 2y ? 14.

9) Daerah yang memenuhi x ?0 adalah daerah di atas sumbu x, termasuk sumbu x sendiri dan yang memenuhi y ?0 dikanan sumbu y, termasuk sumbu y sendiri.

10) Jika titik P merupakan titik potong antara garis 3x + 4y = 12 dengan garis 7x + 2y = 14, maka daerah penyelesaiannya adalah daerah OCPB seperti gambar di bawah.



<u>Contoh 4</u>

Selesaikan sistem pertidaksamaan

3x + 2y ? 12

3x + 4y ?18

x ? 0 dan y ? 0

Penyelesaian

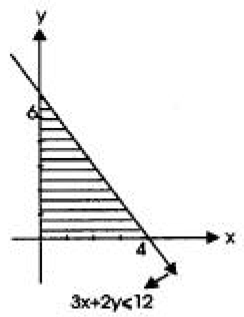
1) Titik potong garis $3x + 2y = 12$ dengan sumbu x adalah (4,0) dan titik potong dengan sumbu y adalah (0,6). Pilih titik (0,0) ternyata memenuhi 3x + 2y ? 12. Jadi (0,0) terletak pada daerah penyelesaian. Dengan demikian daerah yang memenuhi 3x + 2y ? 12, x ? 0 dan y ? 0 adalah gambar (1) di bawah.
2) Karena titik potong garis $3x + 4y = 18$ dengan sumbu x adalah (6,0) dengan sumbu y adalah $(0, \frac{9}{2})$ dimana ordinatnya pecahan, kita gunakan cara lain yaitu dengan tabel.

   Untuk $x = 6$ didapat $3.6 + 4y = 18$ atau $4y = 0$, jadi $y = 0$

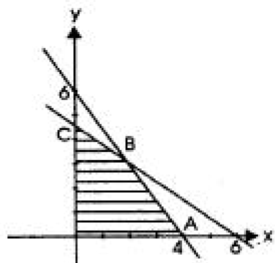
   Untuk $x = 2$ didapat $3.2 + 4y = 18$ atau $4y = 12$, jadi $y = 3$

x	6	2
y	0	3

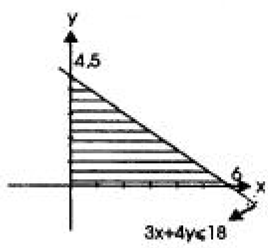
   Buatlah garis melalui (6,0) dan (2,3).
3) Pilih titik (0,0), ternyata memenuhi 3x + 4y ?18. Jadi (0,0) terletak pada daerah penyelesaian. Dengan demikian daerah yang memenuhi 3x + 4y ?18, x ? 0 dan y ? 0 adalah gambar (3) di bawah.
4) Daerah yang memenuhi 3x + 2y ? 12, 3x + 4y ?18, x ? 0 dan y ? 0 adalah daerah OABC seperti gambar (2) di bawah.



(1)



(3)



(2)

Contoh 5

Tentukan penyelesaian sistem pertidaksamaan

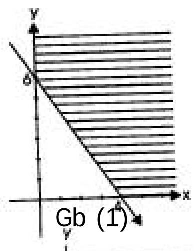
$3x + 2y$? 12

$3x + 4y$? 18

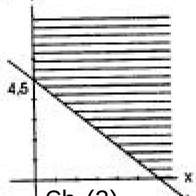
x ? 0 dan y ? 0

Penyelesaian

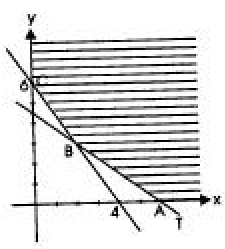
1) Titik potong garis $3x + 2y = 12$ dengan sumbu x adalah (4,0) dan titik potong dengan sumbu y adalah (0,6). Pilih titik (0,0), ternyata 3.0 + 2.0 ? 12 atau 0 ? 12 merupakan *pernyataan yang salah*. Jadi (0,0) tidak terletak pada daerah penyelesaian, daerah penyelesaiannya adalah daerah yang tidak memuat (0,0). Dengan demikian daerah yang memenuhi $3x + 2y$? 12, x ? 0 dan y ? 0 adalah gambar (1) di bawah.
2) Titik potong garis $3x + 4y = 18$ dengan sumbu x adalah (6,0) dengan sumbu y adalah $(0, \frac{9}{2})$. Pilih titik (0,0), ternyata 3.0 + 4.0 ? 12 atau 0 ? 12 merupakan *pernyataan yang salah*. Jadi (0,0) tidak terletak pada daerah penyelesaian, daerah penyelesaiannya adalah daerah yang tidak memuat (0,0). Dengan demikian daerah yang memenuhi $3x + 4y$? 18, x ? 0 dan y ? 0 adalah gambar (2) di bawah.



Gb (1)



Gb (2)



GB (3)

3) Daerah yang memenuhi $3x + 2y$? 12, $3x + 4y$? 18, x ? 0 dan y ? 0 adalah ***daerah terbuka*** OABC yang diarsir seperti gambar (3) di samping.

Contoh 6

Gambarlah grafik daerah hasil dari sistem pertidaksamaan

2x + y ? 2

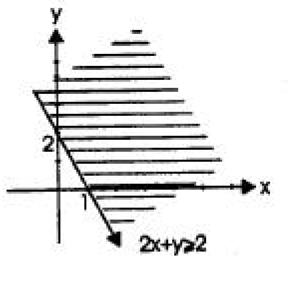
4x + 3y ? 12

0,5 ? x ? 2

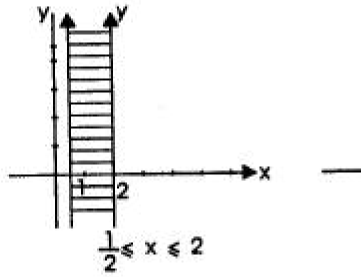
x ? 0 dan y ? 0

Penyelesaian

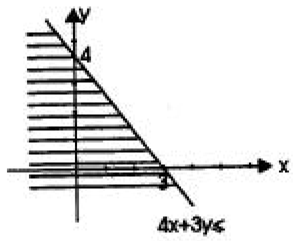
1) Titik potong garis 2x + y = 2 dengan sumbu x adalah (1,0) dan titik potong dengan sumbu y adalah (0,2). Pilih titik (0,0) ternyata tidak memenuhi 2x + y ? 12. Jadi (0,0) tidak terletak pada daerah penyelesaian. Daerah penyelesaian yang tidak memuat (0,0) Dengan demikian daerah yang memenuhi 2x + y ? 2, x ? 0 dan y ? 0 adalah gambar (1) di bawah.
2) Titik potong garis 4x + 3y ? 12 dengan sumbu x adalah (3,0) dengan sumbu y adalah (0, 4). Pilih titik (0,0) ternyata tidak memenuhi 4x + 3y ? 12. Jadi (0,0) terletak pada daerah penyelesaian. Dengan demikian daerah yang memenuhi 4x + 3y ? 12, x ? 0 dan y ? 0 adalah gambar (2) di bawah.
3) Pertidaksamaan 0,5 ? x ? 2 ekuivalen dengan pertidaksamaan x ? 0,5 dan x ? 2. Buatlah garis melalui ($\frac{1}{2}$, 0) sejajar sumbu y dan garis melalui (2,0) sejajar sumbu y. Daerah yang terletak diantara kedua garis ini merupakan penyelesaian dari 0,5 ? x ? 2 seperti pada gambar (3).
4) Daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan:
   2x + y ? 2, 4x + 3y ? 12, 0,5 ? x ? 2, x ? 0 dan y ? 0 adalah daerah arsiran seperti gambar (4) di bawah.



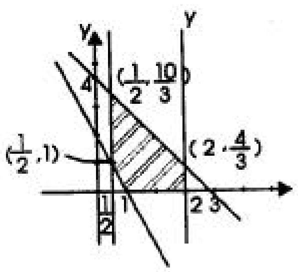
Gb (1)



Gb (3)



Gb (2)



Gb (4)

c. Rangkuman 1

1) Suatu masalah dikatakan masalah program linier jika memenuhi:

   Terdapat tujuan yang dicapai, dan dalam model matematika fungsi tujuan ini dalam bentuk *linier.*

2) Terdapat sumber daya atau *masukan (input)* yang berada dalam keadaan *terbatas*, dapat dirumuskan dalam hubungan yang linear yaitu *pertidaksamaan linear.*

3) Pola umum masalah yang dapat dimodelkan dengan program linier harus memenuhi:

   a. adanya pilihan kombinasi beberapa faktor kegiatan,
   b. adanya sumber penunjang beserta batasnya,
   c. adanya fungsi obyektif/sasaran/tujuan yang harus dioptimumkan
   d. bahwa relasi yang timbul antara faktor-faktor semuanya linier.

d. Tugas 1

Kerjakan soal-soal berikut supaya anda lebih memahami uraian materi kegiatan belajar 1. Jangan membaca/melihat petunjuk mengerjakan latihan sebelum anda coba mengerjakannya. Petunjuk untuk mengerjakan latihan hanya sebagai panduan bila anda mengalami kesulitan menjawab soal berikut ini.

1. Gambar daerah pemecahan pertidaksamaan.
   a) 2x - 2y ? 6
   b) 2x - 5y ? 10
   c) x ? 0 dan y ? 0
2. Gambar daerah yang memenuhi sistem pertidaksamaan dan carilah koordinat titik-titik sudut yang terbentuk.
   a) x + y ? 4
   b) x + 2y ? 6
   c) x ? 0 dan y ? 0
3. Gambar daerah yang memenuhi sistem pertidaksamaan dan carilah koordinat titik-titik sudut yang terbentuk.
   a) x + 2y ? 4
   b) 3x + y ? 6
   c) x ? 0 dan y ? 0
4. Gambar daerah yang memenuhi sistem pertidaksamaan dan carilah koordinat titik-titik sudut yang terbentuk.
   a) x + 2y ? 8
   b) 2x + y ? 8
   c) x ? 0 dan y ? 0
5. Gambar daerah yang memenuhi sistem pertidaksamaan dan carilah koordinat titik-titik sudut yang terbentuk.
   a) 3x + 4y ? 12,
   b) 5x + 6y ? 30
   c) x ? 0 dan y ? 0

e. Kunci Jawaban Tugas 1

Untuk membantu anda yang mengalami kesulitan menjawab soal latihan, silahkan baca panduan berikut.

1. Gambarlah garis (i) $3x + 2y = 6$ kemudian subtitusi (x, y) yang dalam hal ini (0, 0) ke dalam pertidaksamaan dan perhatikan nilai kebenaran pernyataan itu. Kalau ternyata benar, lihat di mana letak (0, 0) itu dan arsir daerah yang sesuai. Gambar garis dengan persamaan $2x - 5y = 10$, kemudian selidikilah nilai kebenaran pertidaksamaan, $0 - 0 ? 10$ ternyata *pernyataan salah*, sehingga daerah pemecahan pertidaksamaan terdapat sebelah bawah/kanan $2x - 5y = 10$. Cara yang sama untuk menggambar (arsiran) daerah pemecahan $x + 2y ? 4$; hanya saja himpunan titik pada garis $x + 2y = 4$ adalah penyelesaian pertidaksamaan dan arsiran ke arah titik (0, 0).
2. Gambarlah garis $x + y = 4$ melaui titik (4, 0) dan (0, 4). Pilih titik (0,0) dan substitusikan pada $x + y ? 4$, didapat $0 ? 4$ yang merupakan *pernyataan benar*, sehingga daerah pemecahan di bawah/kiri $x + y = 4$.
   Gambarlah garis $x + 2y = 6$ melalui titik (6,0) dan (0,3). Pilih titik (0,0) dan substitusikan pada $x + 2y ? 6$, didapat $0 ? 6$ yang merupakan *pernyataan benar*, sehingga daerah pemecahan di bawah/kiri $x + 2y = 6$.

3. Gambarlah garis $x + 2y = 4$ melaui titik (4, 0) dan (0, 2). Pilih titik (0,0) dan substitusikan pada $x + 2y ? 4$, didapat $0 ? 4$ yang merupakan *pernyataan benar*, sehingga daerah pemecahan di bawah/kiri $x + 2y = 4$.
   Gambarlah garis $3x + y = 6$ melalui titik (2,0) dan (0,6). Pilih titik (0,0) dan substitusikan pada $3x + y ? 6$, didapat $0 ? 6$ yang merupakan *pernyataan salah*, sehingga daerah pemecahan di atas/kanan $3x + y = 6$.

4. Gambarlah garis $x + 2y = 8$ melaui titik (8, 0) dan (0, 4). Pilih titik (0,0) dan substitusikan pada $x + 2y ? 8$, didapat $0 ? 8$ yang merupakan *pernyataan benar*, sehingga daerah pemecahan di bawah/kiri $x + 2y = 8$.

Gambarlah garis $2x + y = 6$ melalui titik (3,0) dan (0,6). Pilih titik (0,0) dan substitusikan pada $2x + y$? 6, didapat 0 ? 6 yang merupakan *pernyataan benar*, sehingga daerah pemecahan di bawah/kiri $2x + y = 6$.

5. Gambarlah garis $3x + 4y = 12$ melaui titik (4, 0) dan (0, 3). Pilih titik (0,0) dan substitusikan pada $3x + 4y$? 4, didapat 0 ? 4 yang merupakan *pernyataan salah*, sehingga daerah pemecahan di atas/kanan $3x + 4y = 4$.

6. Gambarlah garis $5x + 6y = 30$ melalui titik (6,0) dan (0,5). Pilih titik (0,0) dan substitusikan pada $5x + 6y$? 30, didapat 0 ? 30 yang merupakan *pernyataan benar*, sehingga daerah pemecahan di bawah/kiri $5x + 6y= 30$.

f. Tes Formatif 1

1. Gambarlah daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linier berikut:
   a) $2x_1 + 3x_2$? 6
   b) $4x_1 + x_2$? 4
   c) x_1 ? 0
   d) x_2 ? 0

2. Gambarlah daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linier berikut:
   a) $x - y$? 0
   b) $x + y$? 7
   c) $6x + y$? 12
   d) x ? 0
   e) y ? 0

3. Gambarlah daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linier berikut:
   a) $- 4x + y$? 2

b) x - y ? 3

c) 3x - 4y ? 5

d) x ? 0

e) y ? 0

4. Gambarlah daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linier berikut:

   a) 2x + 10 y ? 300

   b) 2x + 4y ? 180

   c) 4x + 2 y ? 300

   d) x ? 0

   e) y ? 0.

g. Kunci Jawaban Formatif 1

1. Garis $2x_1 + 3x_2 = 6$ memotong sumbu x di (3, 0) dan sumbu y di (0, 2).

   Garis $4x_1 + x_2 = 4$ memotong sumbu x di (1, 0) dan sumbu y di (0, 4).

   Gambarlah sistem pertidaksamaan di atas maka akan diperoleh daerah penyelesaian OABC dengan O(0,0), A(1, 0), B($\frac{6}{10}$, $\frac{8}{5}$), dan C(0, 2).

2. Garis x - y ? 0 melalui (0,0) dengan graidien 1

   Garis x + y = 7 memotong sumbu x di (7, 0) dan sumbu y di (0, 7).

   Garis 6x + y =12 memotong sumbu x di (2, 0) dan sumbu y di (0, 12).

   Gambarlah sistem ketidaksamaan di atas maka akan diperoleh daerah penyelesaian OABC merupakan *daerah terbuka* dengan A(0, 12), B(1, 6), dan C($\frac{7}{2}$, $\frac{7}{2}$).

3. Garis $-4x + y = 2$ melalui titik (0,2) dan (1,6).

   Garis $x - y = 3$ memotong sumbu x di (3, 0) dan sumbu y di (0, -3).

   Gambarlah $3x - 4y = 5$ melalui titik (3,1) dan (-1, -2).

   Gambarlah sistem ketidaksamaan di atas maka akan diperoleh daerah penyelesaian OABC merupakan *daerah terbuka* dengan A(0, 12), B(1, 6), C($\frac{7}{2}, \frac{7}{2}$).

4. Gambar garis $2x + 10y = 300$ memotong sumbu x di (150,0) dan sumbu y di (0, 30).

   Gambar garis $2x + 4y = 180$ memotong sumbu x di (90,0) dan sumbu y di (0, 45).

   Gambar garis $4x + 2y = 300$ memotong sumbu x di (75,0) dan sumbu y di (0, 150).

   Gambarlah sistem pertidaksamaan di atas maka akan diperoleh daerah penyelesaian OABC dengan O(0,0), A(75, 0), B(60,10), C(50,20) dan D(0,30).

2. Kegiatan Belajar 2: Model Matematika

a. Tujuan Kegiatan Pembelajaran 2

Setelah mempelajari kegiatan belajar ini, diharapkan anda dapat:

✍ Memahami pengertian model matematika.

✍ Mengubah soal verbal dalam bentuk model matematika.

b. Uraian Materi 2

Ide Program linier pertama kali dikembangkan dalam bidang kemiliteran selama Perang Dunia Kedua, kemudian dikembangkan di dalam bidang pemerintahan, manajeman, komersial dan perdagangan, aplikasi dalam bidang industri, dan lainnya.

Kapankah suatu masalah itu merupakan masalah program linier? Suatu masalah dikatakan masalah program linier jika memenuhi:

1. Terdapat tujuan yang dicapai, dan dalam model matematika fungsi tujuan ini dalam bentuk ***linier.***
2. Terdapat sumber daya atau *masukan (input)* yang berada dalam keadaan ***terbatas***, dapat dirumuskan dalam hubungan yang linear yaitu *pertidaksamaan linear.*

Untuk itu perhatikan contoh sebagai berikut:

<u>Contoh 1</u>

Diberikan masalah sebagai berikut:

Sebuah Firma memproduksi sendiri rak buku dalam dua model, yaitu A dan B. Produksi rak buku dibatasi oleh persediaan material (papan kualitas tinggi) dan waktu yang terbatas mesin pemroses. Tiap unit A memerlukan 3 m^2 papan dan tiap unit B memerlukan 4 m^2 papan. Firma memperoleh 1.700 m^2 papan tiap minggu dari pemasok sendiri. Tiap unit A membutuhkan 12 menit dari mesin pemroses dan tiap unit B membutuhkan 30 menit. Setiap minggu memungkinkan total waktu mesin 160 jam. Jika keuntungan (profit) tiap unit

A sebesar Rp 20.000,00 dan tiap unit B sebesar Rp 40.000,00, berapa banyak unit dari tiap model akan perusahaan rencanakan untuk produksi tiap minggu.

Apakah permasalahan di atas merupakan masalah program linier?

Dari masalah di atas ternyata:

a) Terdapat tujuan yang dicapai yaitu mencapai keuntungan maksimum melalui produksi rak buku jenis A dan B di mana tiap jenis produksi itu telah direncanakan mempunyai harga tertentu.

b) Terdapat sumber daya atau *masukan (input)* yang berada dalam keadaan terbatas. Dalam hal ini, Firma mempunyai persediaan, melalui pemasok sendiri, yaitu tiap minggu 1700 m^2, dan waktu kerja mesin pemroses yang terbatas yaitu tiap minggu 160 jam. Jadi permasalahan di atas merupakan permasalahan program linier.

Persediaan yang terbatas itu ada keterkaitan dengan hasil, sehingga dapat dirumuskan dalam hubungan yang linear yaitu *pertidaksamaan linear.* Dengan rumusan masalah yang direncanakan oleh Firma tersebut dan disajikan dalam bentuk rumusan kuantitatif menjadi ***model matematika program linear*.**

<u>Contoh 2</u>

Diberikan permasalahan sebagai berikut:

Seorang pedagang telah menerima dua jenis kembang gula dari seorang pengusaha. Dalam tiap jenis memuat coklat, karamel, dan gula dengan perbandingan

	Coklat	*Karamel*	*Gula*
Jenis A (%)	*20*	*20*	*60*
Jenis B (%)	*20*	*60*	*20*

Kedua jenis ini dicampur dan kemudian dimasak lagi untuk dijadikan kembang gula lagi dengan lebel sendiri; dengan perhitungan kembang gula dengan label baru akan lebih laku jika memuat paling sedikit 4 kg coklat, paling sedikit 6 kg karamel, dan paling sedikit 6 kg gula. Harga jenis A adalah Rp

100.000,00 per kg dan jenis B Rp 150.000,00 per kg. Berapa banyak dari tiap jenis harus dicampur supaya biaya serendah-rendahnya?

Buatlah model matematika dari masalah di atas.

Penyelesaian

Misal banyaknya permen jenis A yang dibuat adalah x buah

banyaknya permen jenis B yang dibuat adalah y buah

Banyaknya coklat yang dipergunakan untuk membuat permen adalah $\frac{20x ? 20y}{100}$. Coklat tersedia lebih dari 4 kg. Dengan demikian didapat hubungan $\frac{20x ? 20y}{100}$? 4 atau 20x + 20y ? 400

x + y ? 20

Banyaknya karamel yang dipergunakan untuk membuat permen adalah $\frac{20x ? 60y}{100}$. Karamel tersedia paling sedikit 6 kg. Dengan demikian didapat hubungan $\frac{20x ? 60y}{100}$? 6 atau 20x + 60y ? 600

x + 3y ? 30

Banyaknya gula yang dipergunakan untuk membuat permen adalah $\frac{60x ? 20y}{100}$. Gula tersedia paling sedikit 6 kg. Dengan demikian didapat hubungan $\frac{60x ? 20y}{100}$? 6 atau 60x + 20y ? 600

3x + y ? 30

Karena yang dibuat adalah permen maka x dan y bilangan bulat dan tak mungkin negatif. Dengan demikian x ? 0 dan y ? 0

Tujuan dari membuat permen ini adalah agar biaya 100.000x + 150.000 y paling kecil atau minimum.

Dengan demikian ***model matematika*** dari masalah di atas adalah:

Carilah x dan y sehingga **meminimumkan** f = 100.000x + 150.000y, dengan kendala:

1) x + y ? 20
2) x + 3y ? 3
3) x + 3y ? 30
4) x ? 0
5) y ? 0

f = 100.000x + 150.000 y disebut **fungsi tujuan** atau **fungsi obyektif** juga sering disebut **fungsi sasaran.** Untuk seterusnya dalam modul ini disebut fungsi obyektif.

<u>Contoh 3</u>

Diberikan masalah sebagai berikut:

Ibu akan membuat roti spiku dan roti donat. Untuk membuat roti spiku dibutuhkan 200 gram tepung dan 25 gram mentega, sedangkan roti donat dibutuhkan 100 gram tepung dan 50 gram mentega. Ibu ingin membuat roti sebayak-banyaknya, tetapi ibu hanya mempunyai 4 kg tepung dan 1,2 kg mentega. Berapa roti spiku dan roti donat yang harus dibuat ibu agar didapat roti sebanyak-banyaknya?

Buatlah model matematikanya.

<u>Penyelesaian</u>

Misal banyaknya roti spiku yang dibuat adalah x buah.
banyaknya roti donat yang dibuat adalah y buah.

Banyaknya tepung yang dipergunakan untuk membuat kedua roti adalah 200x + 100y. Tepung tersedia 4 kg. Dengan demikian didapat hubungan 200x + 100y ? 4000 atau 2x + y ? 40.

Banyaknya mentega yang dipergunakan untuk membuat roti adalah 25x + 50 y. Mentega tersedia 1,2kg. Dengan demikian didapat hubungan 25x + 50 y ? 1200 atau x + 2y ? 48.

Karena yang dibuat adalah roti maka x dan y bilangan bulat dan tak mungkin negatif. Dengan demikian x ? 0 dan y ? 0.

Tujuan dari membuat roti ini adalah agar x + y sebanyak-banyaknya atau maksimum.

Dengan demikian ***model matematika*** dari masalah di atas adalah:

Carilah x dan y sehingga **memaksimumkan** f = x + y,

dengan kendala:

1) 2x + y ? 40
2) x + 2y ? 48
3) x ? 0
4) y ? 0

Fungsi tujuan atau fungsi obyektif dari contoh ini adalah f = x + y.

<u>Contoh 4</u>

Diberikan masalah sebagai berikut.

Sebuah Butik mempunyai persediaan kain 20 m jenis katun dan 60 m jeni wool. Butik akan memproduksi jas dan celana eksklusif untuk wanita. Untuk memproduksi jas ini dibutuhkan 1m katun dan 1,5 m wool, sedangkan untuk membuat celana dibutuhkan 0.25 m katun dan 2m wool. Keuntungan dari membuat jas adalah Rp 100.000,00 dan celana Rp 50.000,00. Berapakah banyaknya jas dan celana yang harus diproduksi agar mendapat untung yang sebanyak-banyaknya?

Buatlah model matematika dari masalah di atas.

<u>Penyelesaian</u>

Misal banyak jas yang dibuat x buah

banyak celana yang dibuat y buah

Permasalahan di atas akan lebih mudah jika disajikan dengan tabel seperti berikut.

Jenis / Bahan	Jas (kebutuhan dalam m) x	Celana (kebutuhan dalam m) y	Persediaan (dalam m)
Katun	1	0,25	20
Wool	1.5	2	60
Keuntungan f	100.000	50.000	

Dengan demikian ***model matematika*** dari masalah di atas adalah:

Carilah x dan y sehingga **memaksimumkan** f = 100.000 x + 50.000y, dengan kendala:

1) x + 0,25y ? 20 atau 4x + y ? 80
2) 1,5x + 2y ? 60 atau 3x + 4y ? 120
3) x ? 0
4) y ? 0

Fungsi obyektif dari contoh ini adalah f = 100.000 x + 50.000y

Contoh 5

Diberikan masalah sebagai berikut.

Sebuah Katering akan membuat dua jenis makanan A dan B. Kedua makanan itu memerlukan tiga bahan dasar yaitu tepung, mentega dan gula. Persedian tepung 10 kg, mentega 16 kg dan gula 28 kg. Setiap satuan makanan A memerlukan bahan tepung, mentega dan gula berturut-turut 20 gram, 20 gram dan 60 gram, dan setiap satuan makanan B memerlukan bahan tepung, mentega dan gula berturut-turut 20 gram, 40 gram dan 40 gram. Jika semua makanan habis dipesan dengan harga masing-masing Rp 1.500,00 dan Rp 1. 200,00, Berapa banyaknya makanan jenis A dan B harus dibuat?

Buatlah model matematikanya.

Penyelesaian

Misal banyaknya makanan A yang dibuat x_1 buah.

banyaknya makanan B yang dibuat x_2 buah

Permasalahan diatas akan lebih mudah jika disajikan dengan tabel seperti berikut.

Jenis / Bahan	Makanan A (dalam gram) x_1	Makanan B (dalam gram) x_2	Persediaan (dalam gram)
Tepung	20	20	10.000
Mentega	20	40	16.000
Gula	60	40	28.000
Penjualan f (dalam rupiah)	1.500	1.200	

Dengan demikian ***model matematika*** dari masalah di atas adalah:

Carilah x_1 dan x_2 sehingga **memaksimumkan** $f = 1500\,x_1 + 1200x_2$,

dengan kendala:

1) $20x_1 + 20x_2$? 10000 atau $x_1 + x_2$? 500
2) $20x_1 + 40x_2$? 16000 atau $x_1 + 2x_2$? 800
3) $60x_1 + 40x_2$? 28000 atau $3x_1 + 2x_2$? 1400
4) x_1 ? 0
5) x_2 ? 0

Fungsi obyektif dari contoh ini adalah $f = 1500\,x_1 + 1200x_2$

c. Rangkuman 2

? Untuk menyelesaikan suatu masalah program linier maka langkah utamanya adalah mengubah masalah itu dalam model matematika, kemudian model itu diselesaikan dan dibawa ke penyelesaian masalah nyata.

? Model matematika dari masalah program linier disajikan dalam bentuk: Carilah x dan y sehingga memaksimumkan/meminimumkan fungsi tujuan $f = ax + by$,

dengan kendala :
1) $p\,x + q\,y$? r, p, q dan r konstanta
2) $kx + ly$? m, k, l, dan m konstanta
3) x ? 0
4) y ? 0

d. Tugas 2

1. Buatlah model matematika dari masalah pada contoh 1 kegiatan belajar ini, dengan terlebih dahulu membuat tabel untuk memudahkan dalam menjawabnya. Tentukan pula fungsi obyektif

2. Diberikan masalah sebagai berikut.

   Untuk membuat satu adonan roti jenis A Ibu memerlukan terigu 400 gram dan mentega 50 gram. Untuk membuat satu adonan roti jenis B diperlukan terigu 200 gram dan mentega 100 gram. Bahan yang tersedia adalah terigu 6 kg dan mentega 2,4 kg. Jika satu roti jenis A mendapatkan keuntungan Rp 1.000,00 dan satu roti jenis B mendapatkan keuntungan Rp 2.000,00, tentukan banyaknya roti jenis A dan B yang harus dibuat Ibu agar untung sebanyak-banyaknya.

   Buatlah model matematika dari masalah di atas dengan terlebih dahulu membuat tabel untuk memudahkan dalam menjawabnya. Tentukan pula fungsi obyektifnya

3. Diberikan masalah sebagai berikut:

   Seorang desainer akan merancang desaian ruang pesawat udara. Tempat duduk dirancang tidak lebih 48 penumpang, bagasi dirancang sehingga penumpang kelas utama dapat membawa 60 kg dan penunpang kelas ekonomi membawa 20 kg. Pesawat itu hanya dapat membawa 1440 kg. Jika harga tiket kelas utama Rp 600.000,00 dan harga tiket kelas ekonomi Rp 350.000,00, berapakah banyaknya kursi kelas utama dan kelas ekonomi yang akan dirancang dalam kabin pesawat agar memperoleh pendapatan sebanyak-banyaknya.

   Buatlah model matematika dari masalah di atas dengan terlebih dahulu membuat tabel untuk memudahkan dalam menjawabnya. Tentukan pula fungsi obyektifnya.

4. Diberikan masalah sebagai berikut:

Sebanyak 70 siswa SMK mengadakan kemah di suatu bumi perkemahan. Untuk keperluan itu disewa dua jenis tenda. Tenda besar dapat menampung 7 siswa dan sewanya Rp 20.000,00. Tenda kecil dapat menampung 2 siswa dan sewanya Rp 15.000,00. Banyaknya tenda yang disewa tidak boleh lebih dari 19 buah. Berapakah banyaknya tenda besar dan kecil yang harus disewa agar biaya sekecil mungkin?.

Buatlah model matematika dari masalah di atas dengan terlebih dahulu membuat tabel untuk memudahkan dalam menjawabnya. Tentukan pula fungsi obyektifnya.

e. Kunci Jawaban Tugas 2

1. Misalkan banyaknya rak buku model A yang dibuat adalah x buah

   banyaknya rak buku model jenis B yang dibuat adalah y buah

Jenis / Bahan	Rak buku model A x	Rak buku model B y	Persediaan	satuan
Papan	3	4	1.700	m
Mesin pemroses	0,2	0,5	160	jam
Keuntungan f	20.000	40.000		

Dengan demikian *model matematika* dari masalah di atas adalah:

Carilah x dan y sehingga *memaksimumkan* f = 20000 x + 40000y, dengan kendala:

a) 3x + 4y ? 1700

b) 0,2x + 0,5y ? 160 atau 2x + 5y ? 1600

c) x ? 0

d) y ? 0

Fungsi obyektif dari masalah ini adalah f = 20000 x + 40000y

2. Misal banyaknya roti jenis A yang dibuat adalah x buah

banyaknya roti jenis B yang dibuat adalah y buah

Jenis Bahan	Roti jenis A x	Roti jenis B y	Persediaan	satuan
Terigu Mentega	40 200	50 100	6000 2400	gram gram
Keuntungan f	1000	2000		

Dengan demikian *model matematika* dari masalah di atas adalah:

Carilah x dan y sehingga *memaksimumkan* f = 1000 x + 2000y,

dengan kendala:

a) 40x + 50y ? 6000 atau 4x + 5y ? 600

b) 200x + 100y ? 2400 atau 2x + y ? 24

c) x ? 0

d) y ? 0

Fungsi obyektif dari masalah ini adalah f = 1000 x + 2000y.

3. Misal banyaknya kursi kelas utama yang dibuat adalah x buah

banyaknya kursi kelas ekonomi yang dibuat adalah y buah

Jenis Bahan	Kelas utama x	Kelas ekonomi y	Persediaan	satuan
kursi Bagasi	1 60	1 20	48 1440	buah kg
Keuntungan f	600.000	350.000		

Dengan demikian *model matematika* dari masalah di atas adalah:

Carilah x dan y sehingga *meminimumkan* f = 600.000 x + 350.000y,

dengan kendala:

a) x + y ? 48

b) 60x + 20y ? 1440

c) x ? 0

d) y ? 0

Fungsi obyektif dari masalah ini adalah f = f = 600.000 x + 350.000y

4. Misal banyaknya tenda besar yang disewa adalah x_1 buah
   banyaknya tenda kecil yang disewa adalah x_2 buah

Jenis / Bahan	Tenda Besar x_1	Tenda kecil x_2	Persediaan	satuan
Tenda	1	1	19	buah
Kapasitas	7	2	70	Orang
Keuntungan f	20.000	15.000		

Dengan demikian *model matematika* dari masalah di atas adalah:

Carilah x dan y sehingga *meminimumkan* f = 20.000 x_1 + 15.000x_2, dengan kendala:

a. $x_1 + x_2$? 19
b. $7x_1 + 2x_2$? 70
c. x_1 ? 0
d. x_2 ? 0

Fungsi obyektif dari masalah ini adalah f = 20.000 x_1 + 15.000x_2,

f. Tes Formatif 2

1. Diberikan masalah sebagai berikut:

   Luas lahan parkir di sebuah area wisata adalah 720 m^2. Luas rata-rata parkir sebuah mobil 10 m^2 dan sebuah bus 30 m^2. Area parkir itu tidak dapat menampung lebih dari 60 kendaraan. Jika ongkos parkir sebuah mobil Rp 1,500,00 dan sebuah bus Rp 2.500,00, berapakah banyaknya mobil dan bus yang parkir supaya memperoleh pendapatan terbesar?

   Buatlah model matematika dari masalah di atas dengan terlebih dahulu membuat tabel untuk memudahkan dalam menjawabnya. Tentukan pula fungsi obyektifnya.

2. Diberikan masalah sebagai berikut:

   Seorang lulusan SMK akan mencoba berdagang buah jeruk dan rambutan. Ia hanya mempunyai modal Rp 1.500.000,00. Harga jeruk tiap keranjang Rp 75.000,00 dan harga rambutan tiap keranjang Rp 50.000,00. Stan yang dipakai berjualan hanya dapat menampung 25 keranjang. Jika laba satu keranjang jeruk Rp 10.000,00 dan laba satu keranjang rambutan Rp 8.000,00, berapakah banyaknya keranjang jeruk dan rambutan yang ia beli agar mendapatkan untung sebanyak-banyaknya?

   Buatlah model matematika dari masalah di atas dengan terlebih dahulu membuat tabel untuk memudahkan dalam menjawabnya. Tentukan pula fungsi obyektifnya.

3. Diberikan masalah sebagai berikut:

   Seorang alumni SMK merencanakan membangun persewaan rumah dengan dua tipe rumah yaitu tipe 45 dan tipe 54 untuk 540 orang. Banyaknya rumah yang dibangun tidak lebih dari 120 rumah. Apabila daya tampung untuk tipe 45 adalah 4 orang dan tipe 54 adalah 6 orang. Sewa sebulan untuk rumah tipe 45 Rp 90.000,00 dan rumah tipe 54 Rp 107.000,00. Berapakah banyaknya rumah tipe 45 dan tipe 54 yang harus dibuat agar pemilik memperoleh pendapatan terbesar?

   Buatlah model matematika dari masalah di atas dengan terlebih dahulu membuat tabel untuk memudahkan dalam menjawabnya. Tentukan pula fungsi obyektifnya.

4. Diberikan masalah sebagai berikut:

   Seorang siswa SMK diharuskan minum 2 jenis tablet vitamin. Tablet pertama mengandung 5 unit vitamin A dan 3 unit vitamin C. Tablet kedua mengandung 10 unit vitamin A dan 1 unit vitamin C. Dalam 1 hari anak tersebut membutuhkan 20 unit vitamin A dan 5 unit vitamin C. Jika tablet pertama harganya Rp 600,00 dan tablet kedua harganya

Rp 800,00, Berapakah tablet pertama dan kedua yang harus dibeli dengan biaya serendah mungkin?

Buatlah model matematika dari masalah di atas dengan terlebih dahulu membuat tabel untuk memudahkan dalam menjawabnya. Tentukan pula fungsi obyektifnya.

g. Kunci Jawaban Formatif 2

1. Misal banyaknya mobil yang parkir adalah x buah

   banyaknya bus yang parkir adalah y buah

Jenis / Bahan	Mobil x	Bus y	Persediaan	satuan
Kendaraan	1	1	60	buah
Luas area	10	30	720	m^2
Keuntungan f	1.500	2.500		

Dengan demikian *model matematika* dari masalah di atas adalah:

Carilah x dan y sehingga *memaksimumkan* f = 1500 x + 2500y,

dengan kendala:

a) x + y ? 60

b) 10x + 30y ? 720 atau x + y ? 72

c) x ? 0

d) y ? 0

Fungsi obyektif dari masalah ini adalah f = 1500 x + 2500y

2. Misal banyaknya jeruk yang dibeli adalah x keranjang

   banyaknya rambutan yang dibeli adalah keranjang

Jenis / Bahan	Jeruk x	rambutan y	Persediaan	satuan
Modal	75.000	50.000	1.500.000	Rupiah
Daya tampung	1	1	25	Keranjang
Keuntungan f	10.000	8.000		

Dengan demikian *model matematika* dari masalah di atas adalah:

Carilah x dan y sehingga *memaksimumkan* f = 10.000 x + 8.000y, dengan kendala:

a) 75.000x + 50.000y ? 1.500.000 atau 3x + 2y ? 60

b) x + y ? 25

c) x ? 0

d) y ? 0

Fungsi obyektif dari masalah ini adalah f = 10.000 x + 8.000y.

3. Misal banyaknya rumah tipe 45 yang dibangun adalah x rumah

banyaknya rumah tipe 45 yang dibangun adalah y rumah

Jenis / Bahan	Tipe 45 x	Tipe 54 y	Persediaan	satuan
Rumah	1	1	120	Rupiah
Daya tampung	4	6	540	Orang
Pendapatan f	90.000	107.000		

Dengan demikian *model matematika* dari masalah di atas adalah:

Carilah x dan y sehingga *memaksimumkan* f = 90.000 x + 107.000y, dengan kendala:

a) x + y ? 120

b) 4x +6 y ? 540 atau 2x +3 y ? 270

c) x ? 0

d) y ? 0

Fungsi obyektif dari masalah ini adalah f = 90.000 x + 107.000y.

4. Misal banyaknya tablet pertama yang dibeli adalah x_1 biji

banyaknya tablet kedua yang dibeli adalah x_2 biji

Jenis / Bahan	Tablet pertama x_1	Tablet kedua x_2	Persediaan	satuan
Vitamin A	5	10	20	unit
Vitamin C	3	1	5	unit
Keuntungan f	600	800		

Dengan demikian *model matematika* dari masalah di atas adalah:

Carilah x dan y sehingga *meminimumkan* f = $600\,x_1 + 800x_2$,

dengan kendala:

a) $x_1 + x_2$? 5

b) $5x_1 + 10x_2$? 20 atau $x_1 + 2x_2$? 4

c) x_1 ? 0

d) x_2 ? 0

Fungsi obyektif dari masalah ini adalah f = $600\,x_1 + 800\,x_2$,

3. Kegiatan Belajar 3: Nilai Optimum

a. Tujuan Kegiatan Pembelajaran

Setelah mempelajari kegiatan belajar ini, diharapkan Anda dapat:

- ✍ Menentukan fungsi tujuan.
- ✍ Menentukan daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linier.
- ✍ Menentukan nilai optimum dengan menyelidiki titik sudut daerah penyelesaian.

b. Uraian Materi

Untuk memperoleh nilai optimum (maksimum atau minimum) dari fungsi obyektif dengan kendala-kendala tertentu, dapat kita lakukan dengan menggambar daerah penyelesaian layak yaitu daerah yang titik-titiknya merupakan himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linier. Nilai optimum dari fungsi obyektif *biasanya* dipenuhi oleh absis dan ordinat titik sudut dalam daerah himpunan penyelesaian.

<u>Contoh 1</u>

Tentukan nilai maksimum dari permasalahan yang model matematikanya sebagai berikut.

Mencari x_1 dan x_2 yang memaksimumkan $f = 4x_1 + 3x_2$,

Dengan kendala:

a. $3x_1 + 4x_2$? 12

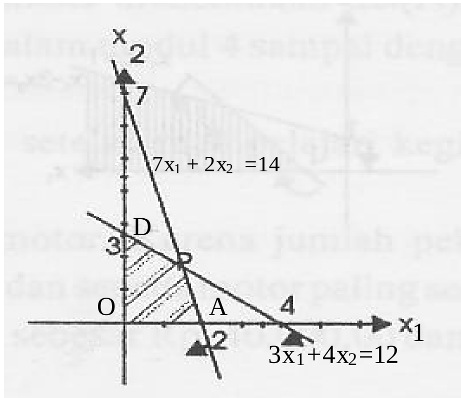
b. $7x_1 + 2x_2$? 14

c. x_1 ? 0

d. x_2 ? 0

Pemecahan masalah sistem pertidaksamaan linier dua variabel merupakan penerapan cara pemecahan sistem pertidaksamaan linear yang anda pelajari di kegiatan belajar 1.

Jika $3x_1 + 4x_2 = 12$ dan $7x_1 + 2x_2 = 14$ dicari titik potongnya (dengan eliminasi dan/atau substitusi) didapat titilk P$\left(\frac{16}{11}, \frac{21}{11}\right)$.



Titik potong $3x_1 + 4x_2 = 12$ dengan sumbu x_1 adalah (4,0) dan titik potong dengan sumbu x_2 adalah (0,3).

Titik potong $7x_1 + 2x_2 = 14$ dengan sumbu x_1 adalah (2,0) dan titik potong dengan sumbu x_2 adalah (0,7). Gambarlah pada kertas berpetak atau polos akan didapat daerah layak seperti gambar di atas. Daerah layaknya adalah daerah segiempat OAPD. Tanda panah menunjukkan arah daerah yang memenuhi kendala.

Untuk titik sudut O(0,0) didapat nilai f = 4.0 + 3.0 = 0

Untuk titik sudut A(2,0) didapat nilai f = 4.2 + 3.0 = 8

Untuk titik sudut P$\left(\frac{16}{11}, \frac{21}{11}\right)$didapat nilai f = 4. $\frac{16}{11}$+ 3.$\frac{21}{11}$ = $\frac{127}{11}$

Untuk titik sudut D(0,3) didapat nilai f = 4.0 + 3.3 = 9

Jadi nilai maksimum f dicapai pada titik sudut P dari poligon daerah layak OAPD yaitu $\frac{127}{11}$ untuk $x_1 = \frac{16}{11}$ dan $x_2 = \frac{21}{11}$

Contoh 2

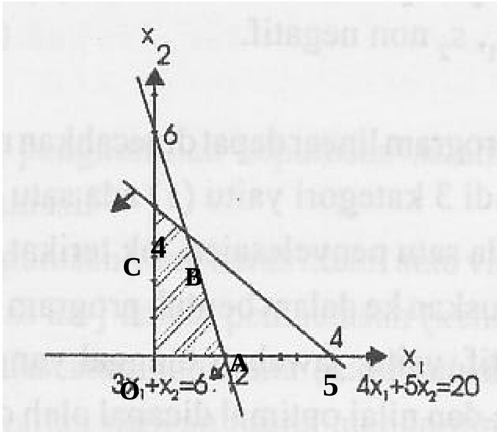
Tentukan nilai maksimum dari permasalahan yang model matematikanya sebagai berikut.

Mencari x_1 dan x_2 yang memaksimumkan $f = 6x_1 + 2x_2$, dengan kendala:

1) $4x_1 + 5x_2$? 20
2) $3x_1 + x_2$? 6
3) x_1 ? 0
4) x_2 ? 0

Penyelesaian

Setelah dibuat gambarnya ternyata daerah layaknya adalah daerah segiempat OABC. Tanda panah menunjukkan arah daerah yang memenuhi pertidaksamaan. Koordinat titik sudutnya adalah O(0,0). A(2,0), B$\left(\frac{10}{11}, \frac{36}{11}\right)$ dan C(0,4).



Bagaimana anda memperoleh koordinat titik B?

Untuk titik sudut O(0,0) didapat f = 6.0 + 2.0 = 0

Untuk titik sudut A(2,0) didapat f = 6.2 + 2.0 = 12

Untuk titik sudut B$\left(\frac{10}{11}, \frac{36}{11}\right)$ didapat f = 6. $\frac{10}{11}$ + 2.$\frac{36}{11}$ = 12

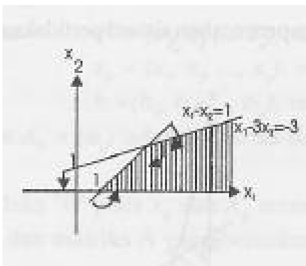
Untuk titik sudut C(0,4) didapat f = 6.0 + 2.5 = 10

Ternyata terdapat dua nilai yang sama yaitu 12 dan ini terjadi di titik sudut A dan B, mengapa demikian? Hal ini disebabkan gradien f = $6x_1 + 2x_2$ untuk suatu nilai f adalah –3, demikian juga gradien $3x_1 + x_2 = 6$ juga –3. Jadi untuk setiap titik pada AB nilai f selalu 12.

Kesimpulan nilai maksimum f adalah 12 untuk titik-titik sepanjang AB. Ini berarti jawaban **tidak tunggal.**

Contoh 3

Mencari x_1 dan x_2 yang memaksi-mumkan f = $x_1 + x_2$, dengan kendala:



1) $x_1 - 5x_2$? 1
2) $x_1 - 3x_2$? -3
3) x_1 ? 0
4) x_2 ? 0

Penyelesaian

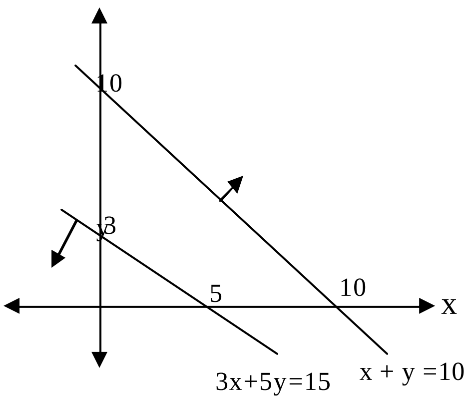
Setelah dibuat gambarnya ternyata daerah layaknya adalah **daerah terbuka** yaitu daerah yang diarsir seperti gambar di atas. Kita tidak dapat menggunakan titik-titik sudut daerah layak untuk mencari nilai f yang maksimun, f maksimum ada di suatu titik tak hingga. Untuk seterusnya dalam modul ini f tidak mempunyai penyelesaian maksimum. Bagaimana mencari nilai f minimum?

Contoh 4

Mencari x dan y yang meminumkan f = 2x + 3y, dengan kendala:

1) x + y ? 10
2) 3x + 5y ? 15
3) x ? 0
4) y ? 0

Penyelesaian



Setelah digambar ternyata tidak ada kurva tertutup sebagai daerah layak. Dengan demikian masalah ini tidak mempunyai penyelesaian.

Contoh 5

Seorang alumni SMK mendapat jatah merakit sepeda dan sepeda motor. Karena jumlah pekerja terbatas, alumni SMK hanya dapat merakit sepeda 120 unit tiap bulan dan sepeda motor paling sedikit 10 unit dan paling banyak 60 unit. Pendapatan dari tiap unit sepeda sebesar Rp. 40.000,00 dan tiap unit sepeda motor Rp. 268.000,00. Berapa pendapatan maksimum tiap bulan kalau kapasitas produksi dua jenis 160 unit.

a) Rumuskan fungsi tujuan

b) Rumuskan kendala

c) Gambarlah daerah layaknya

d) Kemungkinan titik sudut manakah dari daerah layak yang menunjukkan nilai maksimum fungsi tujuan? Berikan alasan!

Penyelesaian

Misal banyaknya sepeda yang dirakit adalah x buah

banyaknya sepeda motor yang dirakit adalah y

a) Fungsi tujuannya adalah f = 40.000x + 268.000y

b) Kendala

1) 10 ? y ? 60
2) 0 ? x ? 120
3) x + y ? 160
4) x ? 0
5) y ? 0

c) Gambarlah daerah pemecahan sistem pertidaksamaan kendala, akan didapat daerah tertutup ABCDE dengan A(0,10), B(120,10), C(120,40), D(100,60) dan E(0,60). Silahkan anda gambar pada kertas berpetak.

d) Untuk titik A(0,10) didapat f = 2.680.000

Untuk titik B(120,10) didapat f = 7.480.000

Untuk titik C(120,40) didapat nilai f = 15.520.000

Untuk titik D(100,60) didapat nilai f = 20.080.000

Untuk titik E(0,60) didapat nilai f = 16.080.000

Jadi laba maksimum tiap bulan adalah Rp 20.080.000,00, jika merakit 100 sepeda dan 60 sepeda motor.

Contoh 6

Seorang alumni Tata Busana mempunyai 60 m wol dan 40 m katun. Dengan bahan yang tersedia itu, alumni tersebut membuat setelan jas dan rok kepada beberapa orang pelanggan. Satu stel jas memerlukan 3 m wol dan 1 m katun, satu rok memerlukan 2 m wol dan 2 m katun. Berapa stel jas dan rok harus dibuat oleh alumni tata busana tersebut kalau harga satu stel jas Rp. 500.000,00 dan harga satu stel rok Rp. 375.000,00 untuk memperoleh pendapatan maksimum.

a) Tentukan fungsi tujuan!
b) Tentukan pertidaksamaan yang menunjukkan kendala, lengkap dengan syarat yang diperlukan.
c) Gambarlah daerah pemecahan pertidaksamaan kendala itu kemudian tentukan koordinat titik sudut poligon (atau segi banyak) pada pembatas itu.
d) Hitunglah nilai maksimum fungsi tujuan.

Penyelesaian

Misal banyaknya jas yang dibuat adalah x buah

banyaknya rok yang dibuat adalah y buah

a) Fungsi tujuannya adalah f = 500.000x + 375.000y

b) Kendala

(1) 3x + 2y ? 60

(2) x + 2y ? 40

(3) x ? 0

(4) y ? 0

c) Gambarlah pada kertas berpetak.

Garis batas Kendala (1) memotong sumbu x di (20,0) dan sumbu y di (0,30)

Garis batas Kendala (2) memotong sumbu x di (40,0) dan sumbu y di (0,20)

Daerah layak adalah daerah tertutup OABC dengan O(0,0), A(20,0), B (10,15) dan C(0,20).

d) Untuk titik A(20,0) didapat f = 10.000.000

Untuk titik B (10,15) didapat f = 10.625.000

Untuk titik C (0,20) didapat nilai f = 7.500.000

Untuk titik O (0,0) didapat nilai f = 0

Jadi pendapatan maksimum adalah Rp 10.625.000,00, jika membuat 10 jas dan 15 rok.

c. Rangkuman 3

1. Sistem pertidaksamaan

   (1) ax + by ? c, a, b, c konstanta

   (2) px + qy ? r; p, q, r konstanta

   (3) x ? 0

   (4) y ? 0

   Dengan bantuan gambar garis ax + by = c dan px + qy = r dan arsiran daerah penyelesaian dapat ditemukan beberapa penyelesaian yang ditunjuk oleh titik sudut pada daerah layak.

2. Untuk menentukan nilai maksimum atau minimum dari daerah layak yang sudah digambar, carilah nilai fungsi tujuan di titik sudut daerah layak. Substitusikan koordinat titik sudut, pada fungsi tujuan. Nilai maksimum akan didapat pada titik sudut dengan nilai fungsi tujuan paling besar, dan nilai minimum didapat pada titik sudut dengan nilai fungsi tujuan paling kecil.

d. Tugas 3

1. Seorang alumni Tata Boga mempunyai bahan A, B dan C dengan banyak yang tersedia berturut-turut 300 unit, 180 unit, dan 300 unit. Dengan bahan yang tersedia, alumni Tata Boga membuat dua macam roti sesuai dengan pesanan langganan. Alumni Tata Boga menetapkan keperluan bahan

macam roti	bahan A	bahan B	bahan C
I	2	2	4
II	10	4	2

Harga roti I sebesar Rp. 350,00 dan ke II Rp. 800,00. Berapa banyak tiap macam harus dibuat untuk memperoleh hasil penjualan terbanyak? Berapa rupiah jumlah terbesar yang diperoleh alumni Tata Boga?

2. Carilah x dan y yang memaksimumkan $f = 12x_1 + 5x_2$, dengan kendala:
   a) $2x_1 + 3x_2$? 6
   b) $4x_1 + x_2$? 4
   c) x_1 ? 0
   d) x_2 ? 0
3. Carilah x dan y yang meminimumkan $f = 4x + 3y$, dengan kendala:
   a) x - y ? 0
   b) x + y ? 7
   c) 6x + y ? 12
   d) x ? 0
   e) y ? 0
4. Carilah x dan y yang meminumkan $f = 12x + 5y$, dengan kendala
   a) –4x + y ? 2
   b) x - y ? 3
   c) 3x - 4y ? 5
   d) x ? 0
   e) y ? 0

e. Kunci Jawaban Tugas 3

1. Misal banyaknya roti jenis I adalah x buah

   Banyaknya roti jenis II adalah y buah

   Model matematikanya adalah:

Fungsi tujuan f = 350 x + 800y

Kendala

a) 2x + 10 y ? 300

b) 2x + 4y ? 180

c) 4x + 2 y ? 300

d) x ? 0

e) y ? 0

Garis 2x + 10 y =300 pada kendala (1) memotong sumbu x di (150,0) dan sumbu y di (0, 30)

Garis 2x + 4y =180 pada kendala (2) memotong sumbu x di (90,0) dan sumbu y di (0, 45)

Garis 4x + 2 y =300 pada kendala (3) memotong sumbu x di (75,0) dan sumbu y di (0, 150)

Gambarlah kendala-kendala di atas maka akan diperoleh daerah layak OABC dengan O(0,0), A(75, 0), B(60,10), C(50,20) dan D(0,30).

Nilai f di O adalah f = 0

Nilai f di A adalah f = 26.250

Nilai f di B adalah f = 29.000

Nilai f di C adalah f = 33.500

Nilai f di D adalah f = 24.000

Jadi pendapatan maksimum Rp 33.500,00 jika roti jenis pertama 50 buah dan roti jenis kedua 20 buah.

2. Garis $2x_1 + 3x_2 = 6$ pada kendala (1) memotong sumbu x_1 di (3, 0) dan sumbu x_2 di (0, 2)

Garis $4x_1 + x_2 = 4$ pada kendala (2) memotong sumbu x_1 di (1, 0) dan sumbu x_2 di (0, 4)

Gambarlah kendala-kendala di atas maka akan diperoleh daerah layak OABC dengan O(0,0), A(1, 0), B($\frac{6}{10}$, $\frac{8}{5}$), dan C(0, 2).

Nilai f di O adalah f = 0.

Nilai f di A adalah f = 12.

Nilai f di B adalah f = 15,2.

Nilai f di C adalah f = 10.

Jadi nilai maksimum 15,2 untuk $x_1 = \frac{6}{10}$ dan $x_2 = \frac{8}{5}$.

3. Garis x - y = 0 pada kendala (1) melalui (0,0) dengan gradien 1.

   Garis x + y = 7 pada kendala (2) memotong sumbu x di (7, 0) dan sumbu y di (0, 7).

   Garis 6x + y = 12 pada kendala (3) memotong sumbu x di (2, 0) dan sumbu y di (0, 12).

   Gambarlah kendala-kendala di atas maka akan diperoleh daerah layak ABC merupakan *daerah terbuka* dengan A(0, 12), B(1, 6), C($\frac{7}{2}, \frac{7}{2}$).

   Nilai f di A adalah f = 36.

   Nilai f di B adalah f = 22.

   Nilai f di C adalah f = $\frac{35}{2}$.

   Jadi nilai minimum f = $\frac{35}{2}$ untuk x = $\frac{7}{2}$ dan y = $\frac{7}{2}$.

4. Garis batas kendala (1) melalui titik (0,2) dan (1,6)

   Garis batas kendala (2) memotong sumbu x di (3, 0) dan sumbu y di (0, -3).

   Garis batas kendala (3) melalui titik (3,1) dan (-1, -2).

   Gambarlah kendala-kendala di atas maka akan diperoleh daerah layak OABC merupakan *daerah terbuka* dengan A(0, 12), B(1, 6), C($\frac{7}{2}, \frac{7}{2}$).

   Nilai f di A adalah f = 36.

   Nilai f di B adalah f = 22.

Nilai f di C adalah f = $\frac{35}{2}$.

Jadi nilai minimum f = $\frac{35}{2}$ untuk x = $\frac{7}{2}$ dan y = $\frac{7}{2}$.

f. Tes Formatif 3

1. Seorang alumni membuka usaha penitipan (parkir) kendaraan (roda 4 atau lebih) menyediakan ruangan seluas 600 m^2. Tiap mobil jenis sedan memerlukan 6 m^2 dan tiap jenis bus memerlukan 30 m^2. Supaya tersedia waktu untuk pemeliharaan bangunan, pengusaha itu menetapkan kepada pelanggan bahwa tidak menampung lebih dari 60 kendaraan sekaligus. Kepada pelanggan dikenakan biaya penitipan (per malam) Rp. 1.250,00 untuk tiap mobil jenis sedan dan Rp. 3.750,00 untuk tiap bus. Berapa banyak kendaraan dari tiap jenis harus ditampung supaya pendapatan yang diperoleh maksimal.

2. Seorang agen sepeda bermaksud membeli 25 buah sepeda untuk persediaan. Harga sepeda biasa Rp. 60.000,00/buah dan sepeda balap Rp. 80.000,00/buah. Ia merencanakan untuk tidak mengeluarkan lebih dari Rp. 1.680.000,00 dengan mengharapkan keuntungan Rp. 10.000,00 dari tiap sepeda biasa dan Rp. 12.000,00 dari tiap sepeda balap. Berapa banyak sepeda biasa dan sepeda balap yang harus dibeli agen?

3. Seorang pengusaha di bidang tempat kos/sewa rumah merencanakan membangun untuk disewakan kepada 540 orang pelajar/siswa. Supaya tersedia tanah untuk sarana olahraga, pengusaha menetapkan untuk membangun tidak lebih dari 120 rumah yang terbagi menjadi dua tipe. Tipe I (untuk 4 orang) disewakan Rp. 90.000,00 sebulan tiap rumah, dan tipe II (untuk 6 orang) disewakan Rp. 107.000,00. Berapakah banyaknya rumah tipe I dan II yang akan dibangun agar memperoleh pendapatan yang maksimum?

4. Carilah x dan y yang memaksimumkan $f = 6x + 2y$, dengan kendala

   a) $4x + 5y$? 20

   b) $3x + y$? 6

   c) x ? 0

   d) y ? 0

g. Kunci Jawaban Formatif 3

1. Misal banyaknya sedan yang parkir adalah x buah

   Banyaknya bus yang parkir adalah y buah

   Buatlah tabel untuk memudahkan menyusun model matematikanya.

   Model matematikanya adalah

   Fungsi tujuan $f = 1.250x + 3.750y$

   Kendala:

   a) $x + y$? 60

   b) $6x + 30y$? 600

   c) x ? 0

   d) y ? 0

   Garis $x + y = 60$ pada kendala (1) memotong sumbu x di (60,0) dan sumbu y di (0, 60)

   Garis $6x + 30y = 600$ pada kendala (2) memotong sumbu x di (100,0) dan sumbu y di (0, 20)

   Gambarlah kendala-kendala di atas maka akan diperoleh daerah layak OABC dengan O(0,0), A(60, 0), B(50,10), dan C(0, 20)

   Nilai f di O adalah f = 0

   Nilai f di A adalah f = 75.000

   Nilai f di B adalah f = 100.000

   Nilai f di C adalah f = 75.000

   Jadi pendapatan maksimum Rp 100.00,00 jika banyaknya sedan yang diparkir 50 buah dan banyaknya bus yang diparkir 10 buah.

2. Misal banyaknya sepeda biasa yang dibeli adalah x buah

Banyaknya sepeda balap yang dibeli adalah y buah

Buatlah tabel untuk memudahkan menyusun model matematikanya.

Model matematikanya adalah

Fungsi tujuan f = 10.000x + 12.000y

Kendala:

a) x + y ? 25

b) 60.000x + 80.000y ? 1.680.000 atau 6x + 8y ? 168

c) x ? 0

d) y ? 0

Garis x + y = 25 pada kendala (1) memotong sumbu x di (25,0) dan sumbu y di (0, 25)

Garis 60.000x + 80.000y =1.680.000 pada kendala (2) memotong sumbu x di (28,0) dan sumbu y di (0, 21)

Gambarlah kendala-kendala di atas maka akan diperoleh daerah layak OABC dengan O(0,0), A(25, 0), B(16,9), dan C(0, 21)

Nilai f di O adalah f = 0

Nilai f di A adalah f = 250.000

Nilai f di B adalah f = 268.000

Nilai f di C adalah f = 252.000

Jadi pendapatan maksimum Rp 268.000,00 jika banyaknya sepeda biasa yang dibeli 16 buah dan banyaknya sepeda balap yang dibeli 9 buah.

3. Misal banyaknya rumah tipe I yang dibuat adalah x buah

Banyaknya rumah tipe II yang dibuat adalah y buah

buatlah tabel untuk memudahkan menyusun model matematikanya.

Model matematikanya adalah

Fungsi tujuan f = 90.000x + 107.000y

Kendala

a) x + y ? 120

b) 4x + 6y ? 540

c) x ? 0

d) y ? 0

Garis x + y = 120 pada kendala (1) memotong sumbu x di (120,0) dan sumbu y di (0, 120)

Garis 4x + 6y = 540 pada kendala (2) memotong sumbu x di (135,0) dan sumbu y di (0, 90)

Gambarlah kendala-kendala di atas maka akan diperoleh daerah layak OABC dengan O(0,0), A(120, 0), B(90,30), dan C(0, 90)

Nilai f di O adalah f = 0

Nilai f di A adalah f = 10.800.000

Nilai f di B adalah f = 11.310.000

Nilai f di C adalah f = 8.100.000

Jadi pendapatan maksimum Rp 11.310.000,00 jika banyaknya rumah tipe I dibangun 90 buah dan banyaknya rumah tipe II yang dibangun 30 buah.

4. Garis 4x + 5y = 20 pada kendala (1) memotong sumbu x di (5,0) dan sumbu y di (0, 4)

   Garis 3x + y = 6 pada kendala (2) memotong sumbu x di (2,0) dan sumbu y di (0, 6)

   Gambarlah kendala-kendala di atas maka akan diperoleh daerah layak OABC dengan O(0,0), A(2, 0), B($\frac{10}{11}$, $\frac{36}{11}$), dan C(0, 4)

   Nilai f di O adalah f = 0

   Nilai f di A adalah f = 12

   Nilai f di B adalah f = 12

   Nilai f di C adalah f = 8

   Jadi maksimum f adalah 12 untuk x = $\frac{10}{11}$ dan y = $\frac{36}{11}$ atau di x = 2 dan y = 0. Ternyata untuk titik-titik yang berada pada ruas garis AB nilai f selalu sama yaitu 12. Dengan demikian ada banyak pilihan jawaban.

4. Kegiatan Belajar 4: Menerapkan Garis Selidik

a. Tujuan Kegiatan Pembelajaran

Setelah mempelajari kegiatan belajar ini, diharapkan Anda dapat:

- ✍ Memahami pengertian garis selidik
- ✍ Membuat garis selidik menggunakan fungsi obyektif
- ✍ Menentukan nilai optimum menggunakan garis selidik

b. Uraian Materi 4

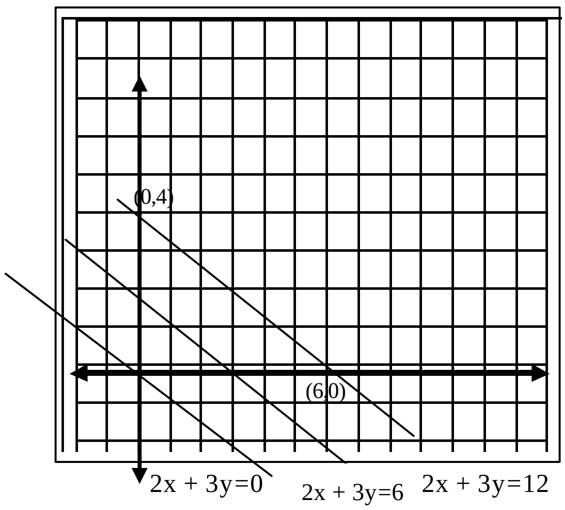
Untuk memperoleh nilai optimum (maksimum atau minimum) dari fungsi obyektif dengan kendala-kendala tertentu, dapat kita lakukan dengan menggambar daerah penyelesaian layak yaitu daerah yang titik-titiknya merupakan himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linier. Nilai optimum dari fungsi obyektif pada kegiatan 3 *biasanya* dipenuhi oleh absis dan ordinat ***titik sudut*** dalam daerah himpunan penyelesaian. Pada kegiatan 4 ini nilai optimum dari fungsi obyektif akan dicari menggunakan garis selidik. Untuk itu akan dipelajari terlebih dahulu pengertian garis selidik. Jika fungsi obyektik dari suatu masalah adalah f = ax + by, maka ***garis selidik*** nya adalah ax + by = k, untuk beberapa nilai k, dengan k ? R. Untuk memahami pengertian garis selidik perhatikan contoh berikut.

Contoh 1

Diketahui fungsi obyektif dari suatu masalah adalah f = 2x + 3y. Buatlah garis selidik dengan menggunakan fungsi tujuan.

Penyelesaian

Garis selidiknya adalah 2x + 3y = k, untuk beberapa k ? R.



Untuk k = 0, 6, 12 didapat:

? garis 2x + 3y = 0 untuk k = 0, garis ini disebut **garis senilai**, sebab untuk (x,y) yang memenuhi garis itu nilai f selalu sama yaitu 0.

? garis 2x + 3y = 6 untuk k = 6, garis ini disebut **garis senilai**, sebab untuk (x,y) yang memenuhi garis itu nilai f selalu sama yaitu 6.

? garis 2x + 3y = 12 untuk k = 12, garis ini disebut **garis senilai**, sebab untuk (x,y) yang memenuhi garis itu nilai f selalu sama yaitu 12.

Tiga garis senilai yang di lukis di atas diperlukan guna menyelidiki ***kemiringan garis senilai*** dan ***arah membesarnya*** (arah pergeserannya) maka ketiga garis senilai secara bersama-sama disebut **garis selidik.** Dengan demikian untuk dua nilai k atau lebih, garis senilai disebut garis selidik. Atau garis senilai disebut garis selidik jika minimal terdapat dua garis senilai.

Dari contoh di atas ternyata:

a) garis selidik makin menjauhi (0,0) (atau ke kanan/ke atas) jika nilai k bertambah besar atau sebaliknya.

b) garis selidik selalu sejajar atau gradiennya sama yaitu $-\frac{2}{3}$.

Contoh 2

Dengan menggunakan garis selidik, tentukan x dan y yang memaksimumkan f = 4x + 3y,

dengan kendala

a. 3x + 4y ? 12

b. 7x + 2y ? 14

c. x ? 0

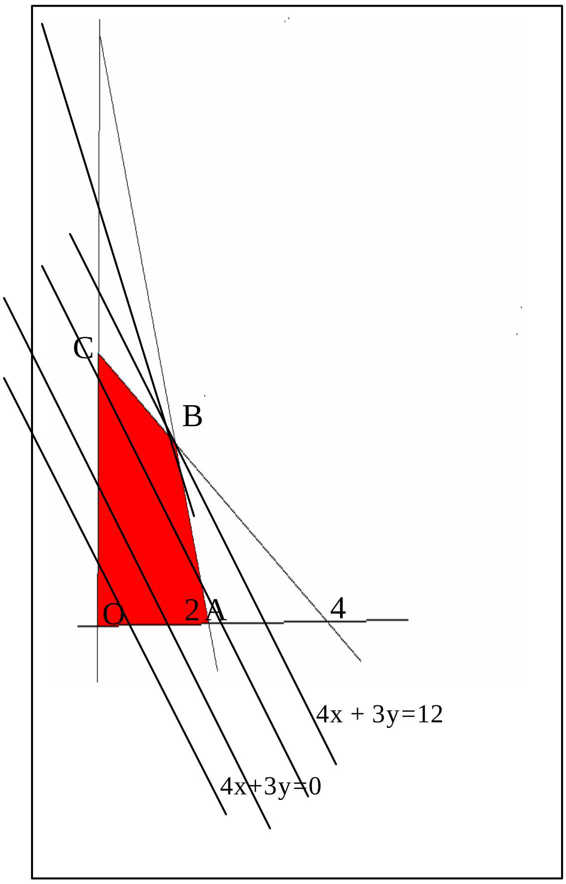
d. y ? 0

Penyelesaian

? Untuk k = 0 didapat garis senilai 4x + 3y = 0,

? Untuk k = 12 didapat garis senilai 4x + 3y = 12,

Ternyata garis selidik makin **menjauhi (0,0)** jika nilai f **makin besar**.



Setelah digambar himpunan daerah penyelesaiannya adalah daerah tertutup OABC, dengan O(0,0), A(2,0), B$(\frac{16}{11},\frac{21}{11})$ yang merupakan titik potong garis 3x + 4y = 12 dan 7x + 2y =14, dan C (0,3).

Jika garis selidik digerakkan ke atas/kekanan *dengan bantuan dua penggaris siku-siku* maka nilai f makin besar, dan nilai f paling besar saat garis selidik menyinggung daerah himpunan penyelesaian yang paling luar, yaitu titik B. Jadi nilai maksimum f $= 4.\frac{16}{11} + 3\frac{21}{11} = \frac{127}{11}$ untuk x = $\frac{16}{11}$ dan y = $\frac{21}{11}$

Contoh 3

Carilah x dan y dari suatu masalah yang fungsi tujuannya adalah f = 40.000x + 268.000y dengan kendala:

(1) 10 ? y ? 60

(2) 0 ? x ? 120

(3) x + y ? 160

(4) x ? 0

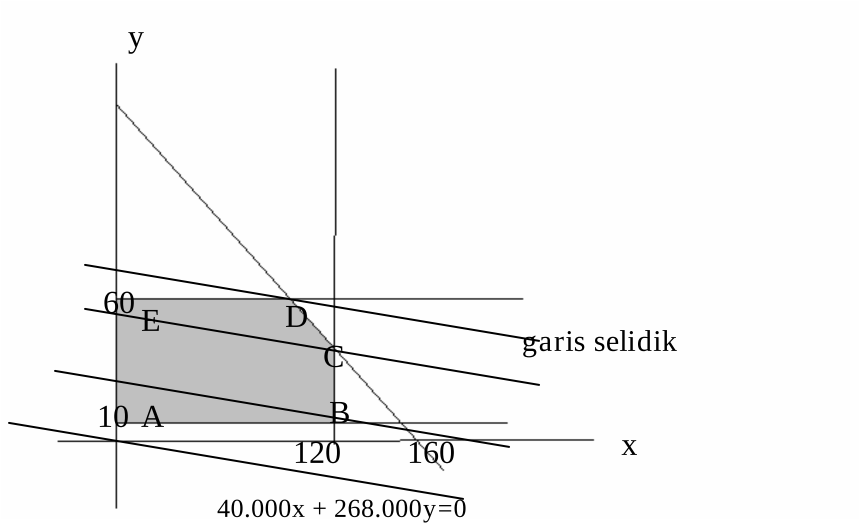
(5) y ? 0

Penyelesaian

? Untuk k = 0 didapat garis senilai 40.000x + 268.000y = 0,

? Untuk k = 12 didapat garis senilai 40.000x + 268.000y = 2.680.000,

Ternyata garis selidik makin **menjauhi (0,0)** jika nilai f **makin besar**.



Setelah digambar didapat himpunan penyelesaiannya adalah daerah tertutup ABCDE dengan A(0,10), B(120,10), C(120,40), D(100,60) dan E(0,60).

Gambar garis selidik 40.000x + 268.000y = 0, kemudian gerakkan ke atas/ke kanan *dengan bantuan dua penggaris siku-siku* maka nilai f makin besar, dan nilai f paling besar saat garis selidik menyinggung daerah himpunan penyelesaian yang paling luar, yaitu titik D. Jadi nilai maksimum f = 20.080.000 untuk x = 100 dan y = 60.

Contoh 4

Suatu pabrik farmasi menghasilkan dua macam kapsul obat flu yang diberi nama fluin dan fluon. Masing-masing kapsul memuat tiga unsur utama dengan kadar kandungannya tertera tabel berikut.

UNSUR	PERKAPSUL	
	FLUIN	FLUON
ASPIRIN	2	1
BIKARBONAT	5	8
KODEIN	1	6

Menurut dokter, seorang yang sakit flu biasa akan sembuh bila dalam 3 hari paling sedikit menelan 12 grain aspirin, 74 grain bikarbonat dan 24 grain kodein. Bila harga fluin Rp 200,00 dan fluon Rp 300,00 per kapsul, berapa kapsul yang fluin dan fluon harus dibeli supaya cukup untuk menyembuhkan dengan ongkos sekecil mungkin?

Penyelesaian

Agar mempermudah perumusan model matematika disusun tabel persiapan sebagai berikut.

UNSUR	x	y	BATAS MINIMAL
	FLUIN	FLUON	
ASPIRIN	2	1	12
BIKARBONAT	5	8	74
KODEIN	1	6	24
HARGA	200	300	

Misal banyaknya fluin yang dibeli x buah

banyaknya fluon yang dibeli y buah

Model matematika dari masalah di atas adalah

Mencari x dan y yang meminimumkan f = 200x + 300 y dengan kendala:

1) 2x + y ? 12
2) 5x + 8y ? 74
3) x + 6y ? 24
4) x ? 0
5) y ? 0

? Untuk k = 0 didapat garis senilai 200x + 300y = 0,

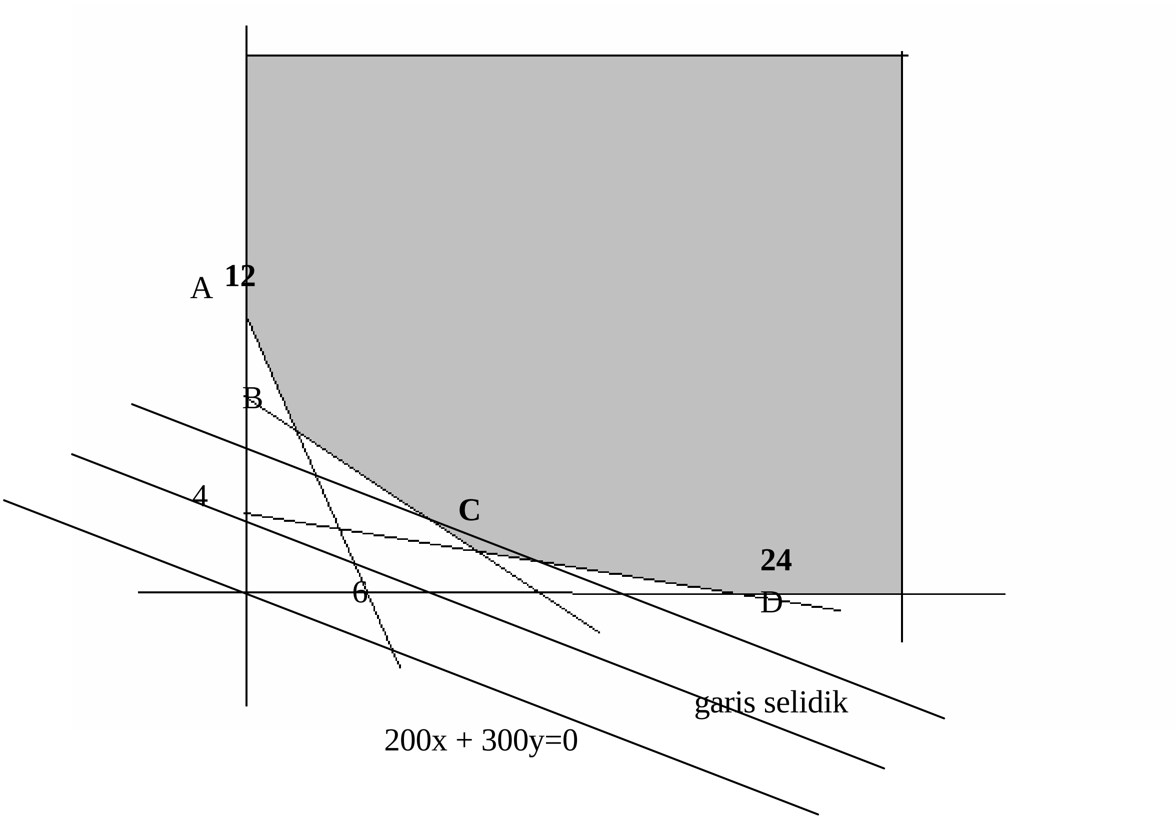
? Untuk k = 100 didapat garis senilai 200x + 300y =100,

Ternyata garis selidik makin **menjauhi (0,0)** jika nilai f **makin besar**.

Setelah digambar didapat himpunan penyelesaiannya adalah daerah terbuka ABCD dengan A(0,12), B(2,8), C($\frac{126}{11}$, $\frac{23}{11}$), dan D(24,0)

Gambar garis selidik 200x + 300y = 0, gradien - $\frac{2}{3}$ dan melalui (0,0) kemudian gerakkan ke atas/ke kanan *dengan bantuan dua penggaris siku-siku* maka nilai f makin besar, jika digerakkan ke kiri nilai f makin kecil dan nilai f **paling kecil** saat garis selidik menyinggung daerah himpunan penyelesaian yang paling luar, yaitu titik B(2,8).

Nilai minimum f = 2.800 untuk x = 2 dan y = 8. Jadi ongkos beli obat paling murah adalah Rp 2.800,00 jika membeli obat fluin 2 kapsul dan fluon 8 kapsul.



c. Rangkuman 4

Untuk menentukan nilai maksimum atau minimum dari daerah layak yang sudah digambar, gambarlah garis selidik yang melalui titik sudut daerah layak. Substitusikan koordinat titik sudut terjauh dari (0,0) untuk soal maksimum atau titik terdekat untuk soal minimum. Nilai yang didapat merupakan penyelesaian dari fungsi tujuan

d. Latihan

1. Seorang alumni Tata Boga mempunyai bahan A, B dan C dengan banyak yang tersedia berturut-turut 300 unit, 180 unit, dan 300 unit. Dengan bahan yang tersedia, alumni Tata Boga membuat dua macam roti sesuai dengan pesanan langganan. Alumni Tata Boga menetapkan keperluan bahan

macam roti	bahan A	bahan B	bahan C
I	2	2	4
II	10	4	2

   Harga roti I sebesar Rp. 350,00 dan ke II Rp. 800,00. Berapa banyak tiap macam harus dibuat untuk memperoleh hasil penjualan terbanyak? Berapa rupiah jumlah terbesar yang diperoleh Alumni Tata Boga?

2. Carilah x dan y yang memaksimumkan $f = 12x_1 + 5x_2$, dengan kendala:
   a) $2x_1 + 3x_2$? 6
   b) $4x_1 + x_2$? 4
   c) x_1 ? 0
   d) x_2 ? 0

3. Carilah x dan y yang meminimumkan $f = 4x + 3y$, dengan kendala:

a) x - y ? 0

b) x + y ? 7

c) 6x + y ? 12

d) x ? 0

e) y ? 0

4. Carilah x dan y yang meminimumkan f = 12x + 5y, dengan kendala:

   a) x + y ? 4

   b) 3x + 5y ? 15

   c) x ? 0

   d) y ? 0

e. Kunci Jawaban Tugas 4

1. Model matematikanya adalah:

   Misal banyaknya roti jenis I adalah x buah

   Banyaknya roti jenis II adalah y buah

   Model matematikanya adalah

   Fungsi tujuan meminimumkan f = 350 x + 800y

   Kendala

   a) 2x + 10 y ? 300

   b) 2x + 4y ? 180

   c) 4x + 2 y ? 300

   d) x ? 0

   e) y ? 0

   Garis batas kendala (1) memotong sumbu x di (150,0) dan sumbu y di (0, 30), garis batas kendala (2) memotong sumbu x di (90,0) dan sumbu y di (0, 45), garis batas kendala (3) memotong sumbu x di (75,0) dan sumbu y di (0, 150). Daerah penyelesaiannya adalah daerah tertutup OABC dengan O(0,0), A (75,0), B(60,10), C(50, 20) dan D(0,30) seperti gambar di bawah.

Untuk k = 0 didapat garis senilai 350x + 800y = 0,

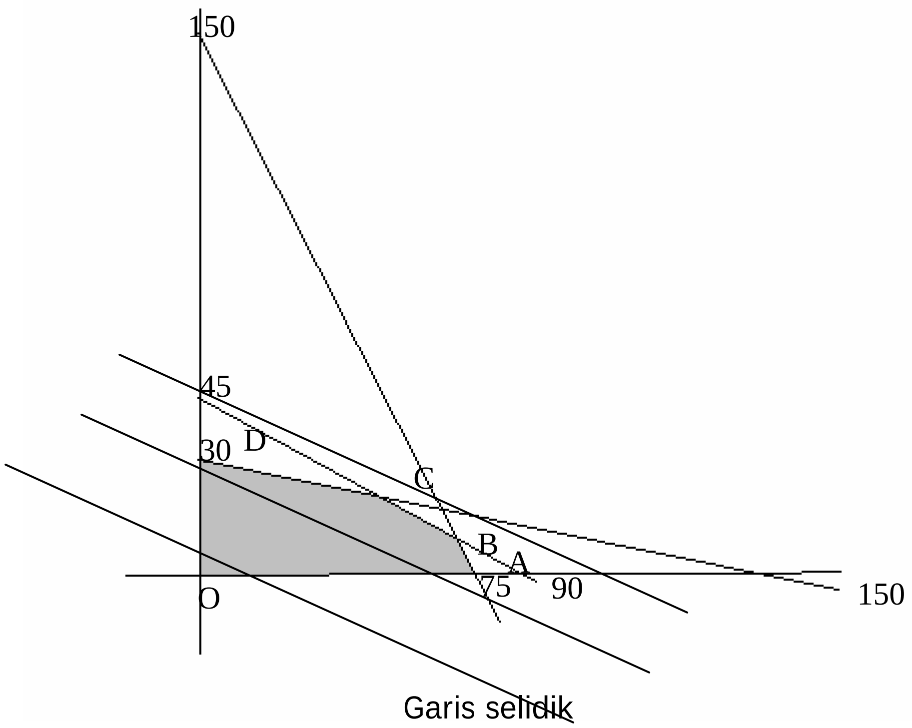
Untuk k = 100 didapat garis senilai 350x + 800y =100,

Ternyata garis selidik makin **menjauhi (0,0)** jika nilai f **makin besar**.

Gambar garis selidik 350x + 800y = 0, gradien - $\frac{7}{16}$ dan melalui (0,0) kemudian gerakkan ke atas/ke kanan *dengan bantuan dua penggaris siku-siku* maka nilai f makin besar, garis selidik menyinggung daerah himpunan penyelesaian yang paling luar, yaitu titik C(50,20). Seperti gambar di bawah.

Nilai f maksimum adalah 33.500 untuk x = 50 dan y = 20

Jadi pendapatan maksimum Rp 33.500,00 jika roti jenis pertama 50 buah dan roti jenis kedua 20 buah.



2. Gambarlah kendala-kendala di atas maka akan diperoleh daerah layak OABC dengan O(0,0), A(2, 0), B($\frac{8}{5}$, $\frac{3}{5}$), dan C(0,2)

   Untuk k = 0 didapat garis senilai $12x_1 + 5x_2 = 0$

Untuk k = 100 didapat garis senilai $12x_1 + 5x_2 = 60$

Ternyata garis selidik makin **menjauhi (0,0)** jika nilai f **makin besar**.

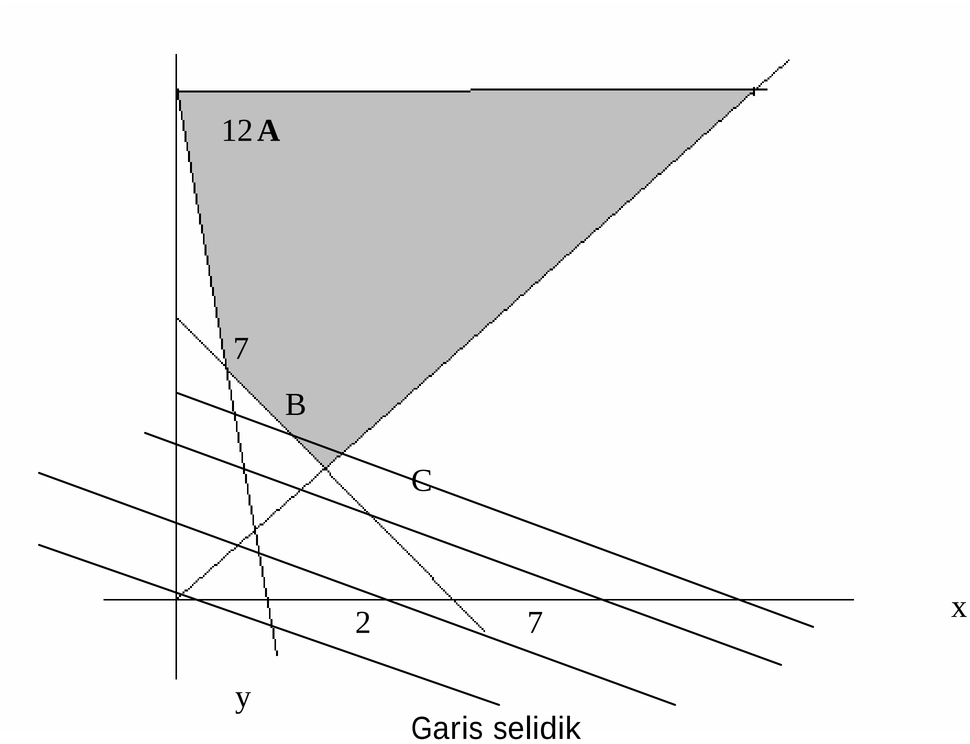
Gambar garis selidik $12x_1 + 5x_2 = 0$, gradien $-\frac{5}{12}$ dan melalui (0,0) kemudian gerakkan ke atas/ke kanan *dengan bantuan dua penggaris siku-siku* maka nilai f makin besar, nilai f terbesar saat garis selidik menyinggung daerah himpunan penyelesaian yang paling luar, yaitu titik B($\frac{8}{5}, \frac{3}{5}$). Nilai f maksimum adalah 22,2 untuk $x_1 = \frac{8}{5}$ dan $x_2 = \frac{3}{5}$

3. Gambarlah kendala-kendala pada soal maka akan diperoleh himpunan penyelesaian merupakan daerah terbuka ABC dengan A(0, 12), B(1, 6), dan C ($\frac{7}{2}, \frac{7}{2}$)

   Untuk k = 0 didapat garis senilai $4x + 2y = 0$

   Untuk k = 4 didapat garis senilai $4x + 2y = 4$

   Ternyata garis selidik makin **mendekati (0,0)** jika nilai f **makin kecil,** dan sebaliknya. Gambar garis selidik $4x + 2y = 0$, gradien $-\frac{1}{2}$ dan melalui (0,0) kemudian gerakkan ke atas/ke kanan *dengan bantuan dua penggaris siku-siku* maka nilai f makin besar, garis selidik menyinggung daerah himpunan penyelesaian yang paling luar, yaitu titik C($\frac{7}{2}, \frac{7}{2}$). Nilai f minimum adalah 21 untuk $x = \frac{7}{2}$ dan $y = \frac{7}{2}$, seperti gambar di bawah.

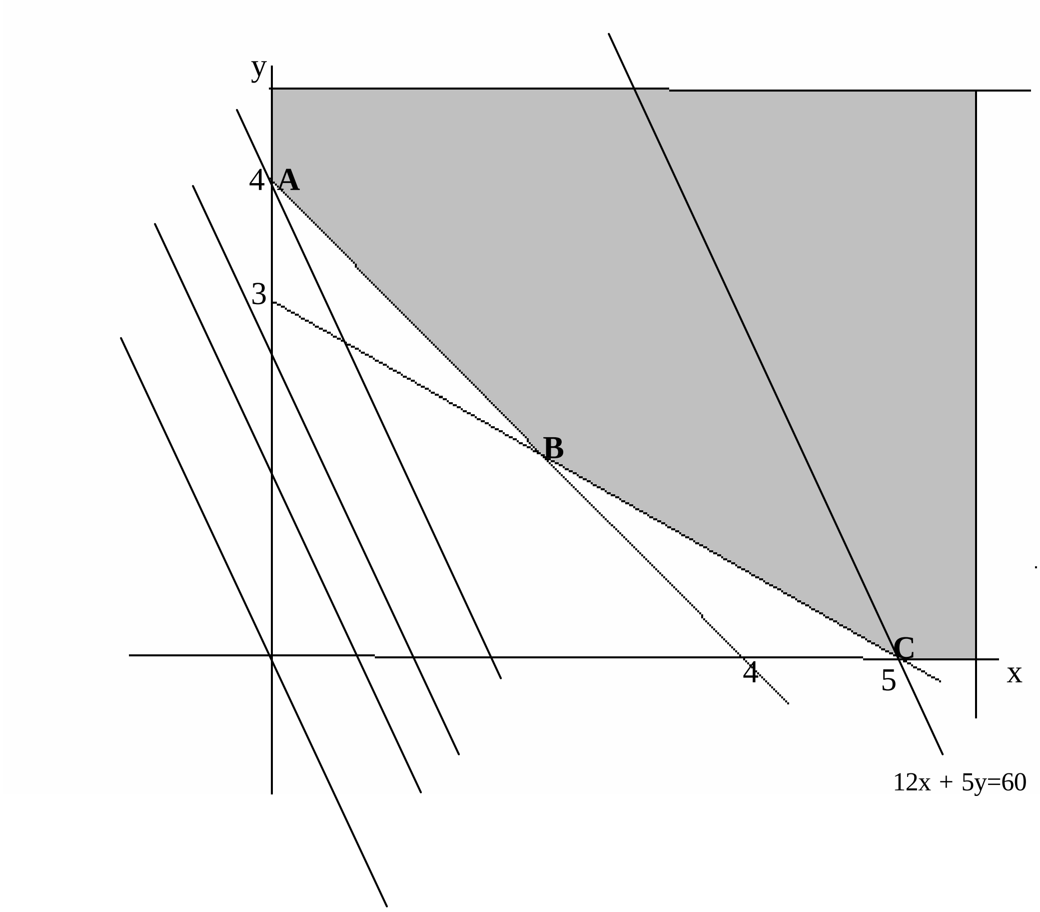


4. Gambarlah kendala-kendala pada soal maka akan diperoleh himpunan penyelesaian merupakan daerah terbuka ABC dengan A (0, 4), B $(\frac{5}{2},\frac{3}{2})$, dan C (5, 0)

   Untuk k = 0 didapat garis senilai 12x + 5y = 0

   Untuk k = 5 didapat garis senilai 12x + 5y = 60

   Ternyata garis selidik makin **mendekati (0,0)** jika nilai f **makin kecil,** dan sebaliknya. Gambar garis selidik 12x + 5y = 0, gradien -$\frac{12}{5}$ dan melalui (0,0) kemudian gerakkan ke atas/ke kanan *dengan bantuan dua penggaris siku-siku* maka nilai f makin besar, garis selidik menyinggung daerah himpunan penyelesaian yang paling luar, yaitu titik A(0, 4). Nilai f minimum adalah 20 untuk x = 0 dan y = 4, seprti gambar di bawah.



f. Tes Formatif 4

1. Seorang pengusaha penitipan (parkir) kendaraan (roda 4 atau lebih) menyediakan ruangan seluas 600 m^2. Tiap mobil jenis sedan/minibus memerlukan 6 m^2 dan tiap jenis bus memerlukan 30 m^2. Supaya tersedia waktu untuk pemeliharaan bangunan, pengusaha itu menetapkan kepada pelanggan bahwa tidak menampung lebih dari 60 kendaraan sekaligus. Kepada pelanggan dikenakan biaya penitipan (per malam) Rp. 1.250,00 untuk tiap mobil jenis sedan dan Rp. 3.750,00 untuk tiap bus. Berapa banyak kendaraan dari tiap jenis harus ditampung supaya pendapatan yang diperoleh maksimal.

2. Seorang agen sepeda bermaksud membeli 25 buah sepeda untuk persediaan. Harga sepeda biasa Rp. 60.000,00/buah dan sepeda balap Rp. 80.000,00/buah. Ia merencanakan untuk tidak mengeluarkan lebih dari Rp. 1.680.000,00 dengan mengharapkan keuntungan Rp. 10.000,00 dari tiap sepeda biasa dan Rp. 12.000,00 dari tiap sepeda balap. Berapa banyak sepeda biasa dan sepeda balap yang harus dibeli agen?
3. Seorang pengusaha di bidang tempat kos/sewa rumah merencanakan membangun untuk disewakan kepada 540 orang pelajar/siswa. Supaya tersedia tanah untuk sarana olahraga, pengusaha menetapkan untuk membangun tidak lebih dari 120 rumah yang terbesar menjadi dua tipe. Tipe I (untuk 4 orang) disewakan Rp. 90.000,00 sebulan tiap rumah, dan tipe II (untuk 6 orang) disewakan Rp. 107.000,00. Berapakah banyaknya rumah tipe I dan II yang akan dibangun agar memperoleh pendapatan yang maksimum?
4. Carilah x dan y yang memaksimumkan $f = 6x + 2y$, dengan kendala:
   a) 4x + 5y ? 20
   b) 3x + y ? 6
   c) x ? 0
   d) y ? 0

g. Kunci Jawaban Tes Formatif 4

1. Model matematikanya adalah:

   Misal banyaknya mobil sedan adalah x buah

   Banyaknya bus adalah y buah

   Model matematikanya adalah

   Fungsi tujuan meminimumkan $f = 1.250\,x + 3.750y$

   Kendala:

   a) x + y ? 60

b) 6x + 30y ? 600

c) x ? 0

d) y ? 0

Setelah digambar daerah penyelesaiannya adalah daerah tertutup OABC dengan O(0,0), A (60,0), B(50,10), C(0, 20).

Gambar garis selidik 1.250x + 3.750y = 0, gradien - $\frac{1}{3}$ dan melalui (0,0) kemudian gerakkan ke atas/ke kanan *dengan bantuan dua penggaris siku-siku* maka nilai f makin besar, garis selidik menyinggung daerah himpunan penyelesaian yang paling luar, yaitu titik B(50,10). Nilai f maksimum adalah 100.000 untuk x = 50 dan y = 10.

Jadi pendapatan maksimum Rp 100.00,00 jika banyaknya sedan 50 buah dan banyaknya bus 10 buah.

2. Misalkan banyaknya sepeda biasa yang dibeli adalah x buah

Banyaknya sepeda balap yang dibeli adalah y buah

Model matematikanya adalah

Fungsi tujuan meminimumkan f = 10.000x + 12.000y

Kendala:

a) x + y ? 25

b) 6x + 8y ? 168

c) x ? 0

d) y ? 0

Setelah digambar daerah penyelesaiannya adalah daerah tertutup OABC dengan O(0,0), A (25,0), B(16,9), C(0, 21).

Gambar garis selidik 10.000x + 12.000y = 0, gradien - $\frac{5}{6}$ dan melalui (0,0) kemudian gerakkan ke atas/ke kanan *dengan bantuan dua penggaris siku-siku* maka nilai f makin besar, garis selidik menyinggung daerah himpunan penyelesaian yang paling luar, yaitu titik C(16,9). Nilai f minimum adalah 268.000 untuk x = 16 dan y = 9.

Jadi biaya minimum Rp 268.000,00 jika banyaknya sepeda biasa 16 buah dan banyaknya sepeda balap 9 buah

3. Misal banyaknya rumah tipe I yang dibuat adalah x buah

   Banyaknya rumah tipe I yang dibuat adalah y buah

   Model matematikanya adalah

   Fungsi tujuan meminimumkan f = 90.000x + 107.000y

   Kendala:

   a) x + y ? 120
   b) 4x + 6y ? 540
   c) x ? 0
   d) y ? 0

   Setelah digambar daerah penyelesaiannya adalah daerah tertutup OABC dengan O(0,0), A (120,0), B(90, 30), C(0, 90).

   Gambar garis selidik 90.000x + 107.000y = 0, kemudian gerakkan ke atas/ke kanan *dengan bantuan dua penggaris siku-siku* maka nilai f makin besar, garis selidik menyinggung daerah himpunan penyelesaian yang paling luar, yaitu titik B(90,30). Nilai f maksimum adalah 11.310.000 untuk x = 16 dan y = 9.

   Jadi pendapatan maksimum adalah Rp 11.310.000,00 jika banyaknya rumah tipe I ada 90 buah dan banyaknya rumah tipe II ada 30 buah.

4. Setelah digambar daerah penyelesaiannya adalah daerah tertutup OABC dengan O(0,0), A (2,0), B($\frac{10}{11}$, $\frac{36}{11}$), C(0, 4).

   Gambar garis selidik 6x + 2y = 0, kemudian gerakkan ke atas/ke kanan *dengan bantuan dua penggaris siku-siku* maka nilai f makin besar, garis selidik menyinggung daerah himpunan penyelesaian yang paling luar, yaitu titik B($\frac{10}{11}$, $\frac{36}{11}$). Nilai f maksimum adalah 12 untuk x = $\frac{10}{11}$ dan y = $\frac{36}{11}$

BAB III. EVALUASI

A. Tes Tertulis

Jawablah pertanyaan di bawah ini dengan singkat dan jelas!

Sebuah pabrik memproduksi barang kualitas A dan B. produksi maksimum setiap harinya 14 unit. Menurut permintaan konsumen paling sedikit harus dibuat 2 unit barang kualitas A dan 1 unit barang kualitas B. sedangkan kemampuan mesin produksi hanya bisa membuat 9 unit barang kualitas A dan 6 unit barang kualitas B. Mesin berproduksi setiap harinya tidak lebih dari 81 unit. Keuntungan dari satu barang kualitas A adalah Rp 400,00 dan satu barang kualitas B adalah Rp 250,00.

a. Buatlah table untuk memudahkan memecahkan masalah di atas.
b. Berdasarkan tebel yang dibuat, susun model matematikanya.
c. Gambarlah himpunan penyelesaian dari kendala-kendala dari model matematika yang anda buat.
d. Carilah banyaknya barang kualitas A dan banyaknya barang kualitas B yang dibuat agar mendapat keuntungan maksimum dengan cara menggunakan titik sudut dari daerah himpunan penyelesaian.
e. Carilah banyaknya barang kualitas A dan banyaknya barang kualitas B yang dibuat agar mendapat keuntungan maksimum dengan cara menggunakan garis selidik.

B. Kunci Jawaban

a. Misal banyaknya barang berkualitas A adalah x buah
   banyaknya barang berkualitas B adalah y buah

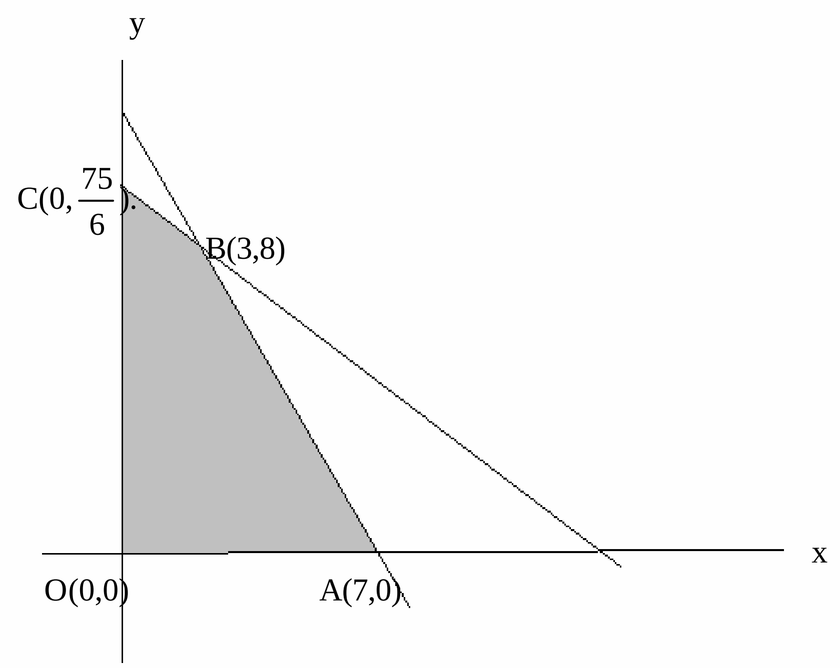
UNSUR	x	y	BATAS MINIMAL
	Barang A	Barang B	
PRODUKSI	2	1	14
KAPASITAS MESIN	9	6	81
HARGA	400	250	

b. Model matematika dari masalah di atas adalah
   Mencari x dan y yang meminimumkan f = 400x + 250 y dengan kendala:
   (1) 2x + y ? 14
   (2) 9x + 6y ? 75
   (3) x ? 0
   (4) y ? 0

c. Garis 2x + y =14 pada kendala (1) memotong sumbu x di (7, 0) dan memotong sumbu y di (0, 14). Garis 9x + 6y = 81 memotong sumbu x di (9, 0) dan melalui titik (3,8). Garis 2x + y =14 dan 9x + 6y = 75 berpotongan di (3, 8). Himpunan penyelesaiannya adalah daerah tertutup OABC dengan O(0,0), A(7, 0), B(3, 8), dan C(0, $\frac{75}{6}$). Gambar daerah himpunan penyelesaian adalah gambar (1) di bawah.

d. Nilai f di O(0,0) dalah f = 0
   Nilai f di A(7,0) dalah f = 2.800
   Nilai f di B(3, 8) adalah f = 3.200
   Nilai f di C(0, $\frac{75}{6}$) adalah f = 3.125
   Jadi nilai maksimum f adalah 3.200 untuk x =3 dan y = 8

Dengan demikian banyaknya barang kualitas A yang dibuat adalah 3 buah dan banyaknya barang kualitas B yang dibuat adalah 8 agar mendapat keuntungan maksimumRp 3.200,00



Gambar (1)

e. Untuk k = 0 didapat persamaan garis selidik 400x + 250 y = 0

   Untuk k = 2.000 didapat persamaan garis selidik 400x + 250 y = 6.000 atau 8x + 5y = 120. Nilai f makin kekanan makin besar. Gerakan garis selidik sedemikian hingga menyinggung daerah himpunan yang paling jauh dari (0,0) didapat titik B (3,8). Jadi nilai maksimum f adalah 3.200 untuk x =3 dan y = 8

   Dengan demikian banyaknya barang kualitas A yang dibuat adalah 3 buah dan banyaknya barang kualitas B yang dibuat adalah 8 agar mendapat keuntungan maksimumRp 3.200,00.

BAB IV. PENUTUP

Setelah menyelesaikan modul ini, anda berhak untuk mengikuti tes praktek untuk menguji kompetensi yang telah anda pelajari. Apabila anda dinyatakan memenuhi syarat kelulusan dari hasil evaluasi dalam modul ini, maka anda berhak untuk melalnjutkan ke topik/modul berikutnya.

Mintalah kepada guru uji kompetensi dengan sistem penilaian yang dilakukan langsung oleh pihak industri atau asosiasi yang berkompeten apabila anda telah menyelesaikan seluruh evaluasi dari setiap modul, maka hasil yang berupa nilai dari guru atau berupa portofolio dapat dijadikan bahan verifikasi oleh pihak industri atau asosiasi profesi. Kemudian selanjutnya hasil tersebut dapat dijadikan sebagai penentu standar pemenuhan kompetensi dan bila memenuhi syarat anda berhak mendapatkan sertifikat kompetensi yang dikeluarkan oleh dunia industri atau asosiasi profesi.

DAFTAR PUSTAKA

Soemartoyo, N. dan Tapilouw, M., 1994. *Program Linier*, Modul 1-12, Departemen Pendidikan dan Kebudayaan, Direktorat Jenderal Pendidikan Dasar dan Menengan, Proyek Peningkatatan Mutu Guru SLTP Setara D-III, Jakarta: Universitas Terbuka

Susanta, B. 1994. *Program Linier*, Proyek Peningkatan Dosen LPTK, Departemen Pendidikan dan Kebudayaan, Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi, Jakarta: Depdikbud

Ganesha Operation, 2003. *Buku Pelajaran SMU Kelas 2 Semester 2*, Bandung: Ganesha Operation