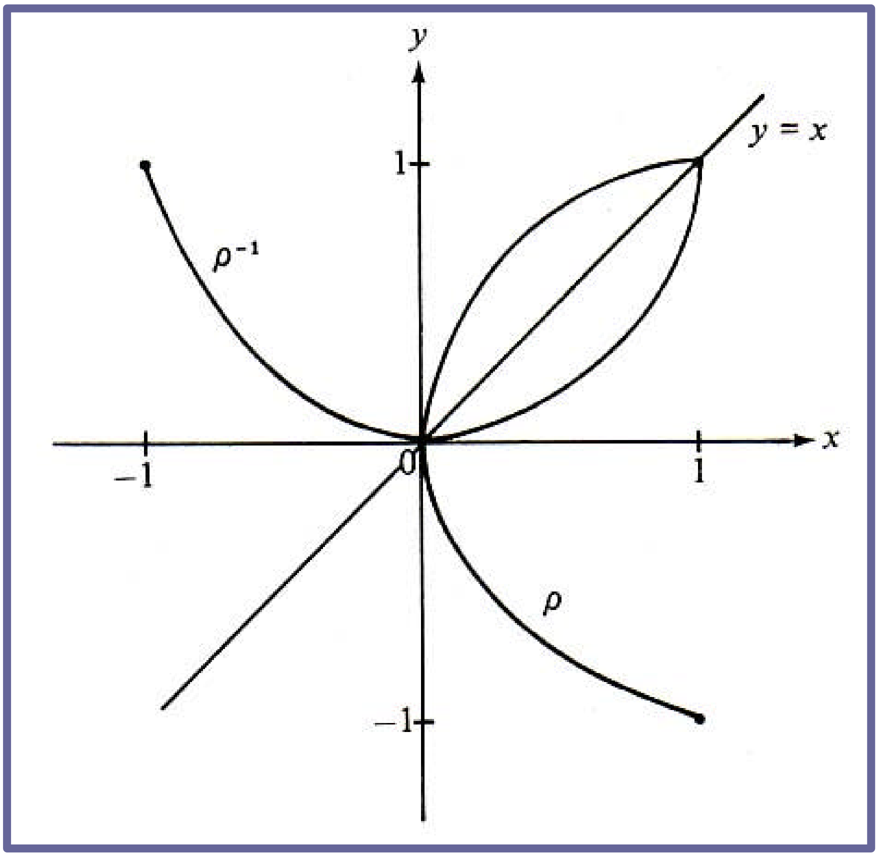
KODE MAT. 04

GEOMETRI
DIMENSI DUA

BAGIAN PROYEK PENGEMBANGAN KURIKULUM
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH KEJURUAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
2004

Kode MAT. 05

Relasi dan fungsi



BAGIAN PROYEK PENGEMBANGAN KURIKULUM
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH KEJURUAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
2004

Kode MAT. 05

Relasi dan Fungsi

Penyusun:

Dra. Siti M. Amin, M.Pd.

Editor:
Dr. Manuharawati, MSi.
Dra. Kusrini, M.Pd.

BAGIAN PROYEK PENGEMBANGAN KURIKULUM
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH KEJURUAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
2004

Kata Pengantar

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa atas karunia dan hidayah-Nya, kami dapat menyusun bahan ajar modul manual untuk SMK Bidang Adaptif, yakni mata pelajaran Fisika, Kimia dan Matematika. Modul yang disusun ini menggunakan pendekatan pembelajaran berdasarkan kompetensi, sebagai konsekuensi logis dari Kurikulum SMK Edisi 2004 yang menggunakan pendekatan kompetensi *(CBT: Competency Based Training).*

Sumber dan bahan ajar pokok Kurikulum SMK Edisi 2004 adalah modul, baik modul manual maupun interaktif dengan mengacu pada Standar Kompetensi Nasional (SKN) atau standarisasi pada dunia kerja dan industri. Dengan modul ini, diharapkan digunakan sebagai sumber belajar pokok oleh peserta diklat untuk mencapai kompetensi kerja standar yang diharapkan dunia kerja dan industri.

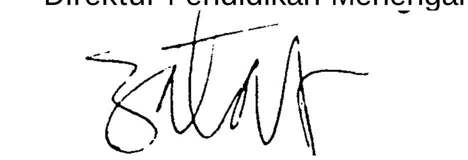
Modul ini disusun melalui beberapa tahapan proses, yakni mulai dari penyiapan materi modul, penyusunan naskah secara tertulis, kemudian disetting dengan bantuan alat-alat komputer, serta divalidasi dan diujicobakan empirik secara terbatas. Validasi dilakukan dengan teknik telaah ahli (*expert-judgment*), sementara ujicoba empirik dilakukan pada beberapa peserta diklat SMK. Harapannya, modul yang telah disusun ini merupakan bahan dan sumber belajar yang berbobot untuk membekali peserta diklat kompetensi kerja yang diharapkan. Namun demikian, karena dinamika perubahan sain dan teknologi di industri begitu cepat terjadi, maka modul ini masih akan selalu dimintakan masukan untuk bahan perbaikan atau direvisi agar supaya selalu relevan dengan kondisi lapangan.

Pekerjaan berat ini dapat terselesaikan, tentu dengan banyaknya dukungan dan bantuan dari berbagai pihak yang perlu diberikan penghargaan dan ucapan terima kasih. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini tidak berlebihan bilamana disampaikan rasa terima kasih dan penghargaan yang sebesar-besarnya kepada berbagai pihak, terutama tim penyusun modul (penulis, editor, tenaga komputerisasi modul, tenaga ahli desain grafis) atas dedikasi, pengorbanan waktu, tenaga, dan pikiran untuk menyelesaikan penyusunan modul ini.

Kami mengharapkan saran dan kritik dari para pakar di bidang psikologi, praktisi dunia usaha dan industri, dan pakar akademik sebagai bahan untuk melakukan peningkatan kualitas modul. Diharapkan para pemakai berpegang pada azas keterlaksanaan, kesesuaian dan fleksibilitas, dengan mengacu pada perkembangan IPTEK pada dunia usaha dan industri dan potensi SMK dan dukungan dunia usaha industri dalam rangka membekali kompetensi yang terstandar pada peserta diklat.

Demikian, semoga modul ini dapat bermanfaat bagi kita semua, khususnya peserta diklat SMK Bidang Adaptif untuk mata pelajaran Matematika, Fisika, Kimia, atau praktisi yang sedang mengembangkan modul pembelajaran untuk SMK.

Jakarta, Desember 2004
a. n. Direktur Jenderal Pendidikan
Dasar dan Menengah
Direktur Pendidikan Menengah Kejuruan,



Dr. Ir. Gatot Hari Priowirjanto, M. Sc.
NIP 130 675 814

Kata Pengantar

Puji sukur kami haturka ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa atas segala karunianya, sehingga kami dapat menyelesaikan penulisan modul Relasi dan Fungsi untuk Sekolah Menengah Kejuruan. Penulisan buku ini berdasarkan Kurikulum SMK Edisi 2004.

Pada modul ini anda akan mempelajari relasi dan fungsi, yang meliputi konsep relasi dan fungsi serta konsep fungsi linier, kuadrat, eksponen, logaritma, dan trigonometri. Dengan mempelajari relasi dan fungsi diharapkan anda dapat memahami konsep berbagai macam fungsi. Perkenankan kami mengucapkan terima kasih kepada Direktorat Pendidikan Menengah Kejuruan, Direktorat Jenderal Pendidikan Dasar dan Menengah, Departemen Pendidikan Nasional, yang telah memberikan kepercayaan kepada kami untuk menulis modul relasi dan fungsi ini.

Harapan kami semoga modul relasi dan fungsi ini dapat memberikan sumbangan yang bermakna bagi pendidikan kejuruan di tanah air. Kami menyambut gembira dan mengucapkan terima kasih terhadap semua pihak yang melakukan koreksi dan memberikan saran untuk perbaikan buku relasi dan fungsi ini.

Surabaya, Desember 2004

Penulis,

Siti M. Amin

DAFTAR ISI

- Halaman Sampul i
- Halaman Francis ii
- Kata Pengantar iii
- Kata Pengantar v
- Daftar Isi vi
- Peta Kedudukan Modul........ viii
- Daftar Judul Modul ix
- Glosary x

I. PENDAHULUAN

A. Deskripsi 1
B. Prasyarat 1
C. Petunjuk Penggunaan Modul........ 1
D. Tujuan Akhir 2
E. Kompetensi........ 2
F. Cek Kemampuan 4

II. PEMBELAJARAN

A. Rencana Belajar Peserta Diklat 7

B. Kegiatan Belajar 8

1. Kegiatan Belajar 1........ 8

a. Tujuan Kegiatan Pembelajaran 8
b. Uraian Materi........ 8
c. Rangkuman 23
d. Tugas 24
e. Tes Formatif........ 26
f. Kunci Jawaban Formatif........ 27

2. Kegiatan Belajar 2 29
a. Tujuan Kegiatan Pembelajaran 29
b. Uraian Materi........ 29
c. Tugas........ 49
d. Tugas........ 50
e. Tes Formatif........ 51
f. Kunci Jawaban Formatif........ 51

3. Kegiatan Belajar 3 53
   a. Tujuan Kegiatan Pembelajaran 53
   b. Uraian Materi 53
   c. Rangkuman 63
   d. Kunci Tugas 66
   e. Tes Formatif 66
   f. Kunci Jawaban Formatif 67

4. Kegiatan Belajar 4 68
   a. Tujuan Kegiatan Pembelajaran 68
   b. Uraian Materi 68
   c. Rangkuman 69
   d. Kunci Tugas 70
   e. Tes Formatif 70
   f. Kunci Jawaban Formatif 71

5. Kegiatan Belajar 5 72
   a. Tujuan Kegiatan Pembelajaran 72
   b. Uraian Materi 72
   c. Rangkuman 75
   d. Kunci Tugas 75
   e. Tes Formatif 75
   f. Kunci Jawaban Formatif 75

6. Kegiatan Belajar 6 76
   a. Tujuan Kegiatan Pembelajaran 76
   b. Uraian Materi 76
   c. Rangkuman 86
   d. Kunci Tugas 86
   e. Tes Formatif 86
   f. Kunci Jawaban Formatif 87

III. EVALUASI 88

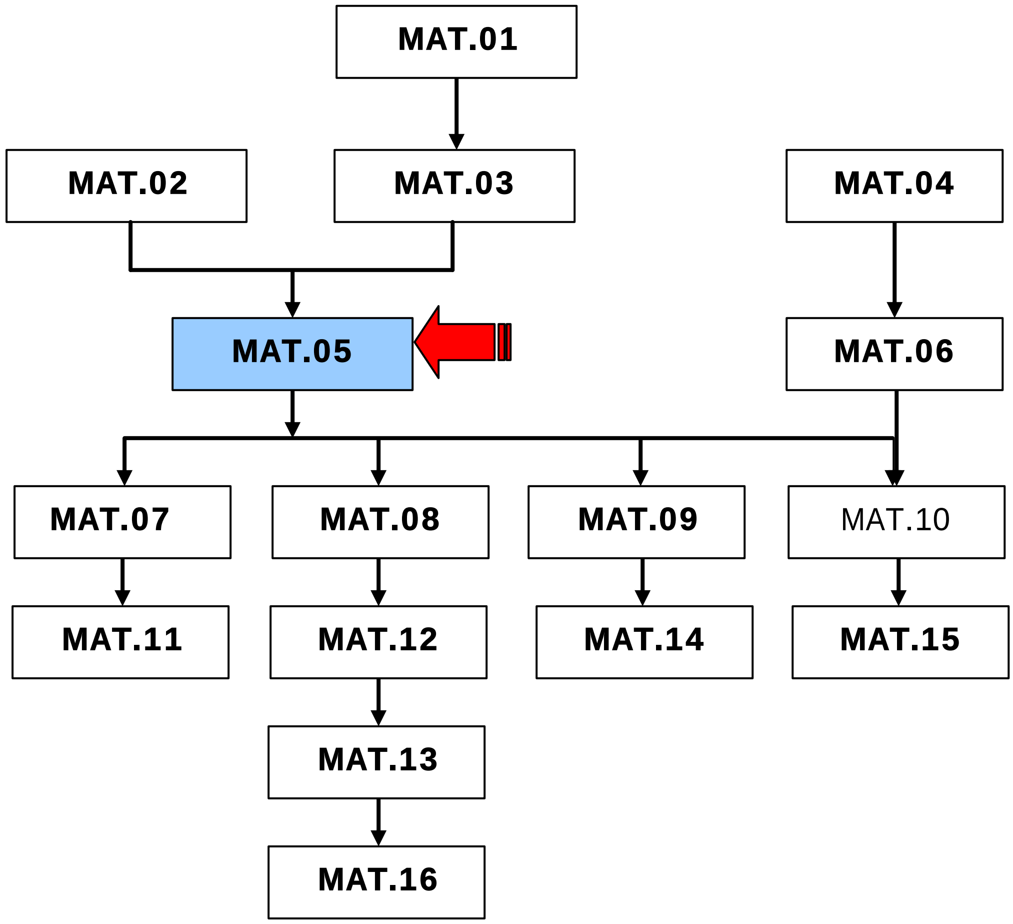
KUNCI JAWABAN TES EVALUASI 89

KUNCI JAWABAN CEK KEMAMPUAN 90

IV. PENUTUP 92

DAFTAR PUSTAKA 93

PETA KEDUDUKAN MODUL



Daftar Judul Modul

No.	Kode Modul	Judul Modul
1	MAT.01	Matrik
2	MAT.02	Logika Matematika
3	MAT.03	Persamaan dan Pertidaksamaan
4	MAT.04	Geometri Dimensi Dua
5	MAT.05	Relasi Dan Fungsi
6	MAT.06	Geometri Dimensi Tiga
7	MAT.07	Peluang
8	MAT.08	Bilangan Real
9	MAT.09	Trigonometri
10	MAT.10	Irisan Kerucut
11	MAT.11	Statistika
12	MAT.12	Barisan
13	MAT.13	Aproksimasi Kesalahan
14	MAT.14	ProgramLinier
15	MAT.15	Vektor
16	MAT.16	Matematika Keuangan

Glossary

ISTILAH	KETERANGAN
Bayangan	Bayangan a oleh relasi R adalah b, ditulis R(a) = b.
Berimpit	Dua garis berimpit jika kedua garis tersebut sejajar dan mempunyai satu titik sekutu.
Codomain	Pada R: A ? B, B disebut codomain
Daerah asal	Pada R: A ? B, A disebut daerah asal
Daerah hasil	Pada R: A ? B, himpunan bagian yang anggotanya merupakan bayangan anggota A disebut daerah hasil
Daerah pasangan	Sama dengan codomain
Domain	Sama dengan daerah asal
Fungsi	Fungsi adalah relasi yang menghubungkan setiap anggota domain secara tunggal dengan anggota codomain.
Fungsi bijektif	Fungsi yang satu-satu pada
Fungsi cosinus	Fungsi cosinus adalah fungsi yang persamaannya $y = \cos x$
Fungsi cotangen	Fungsi cotangen adalah fungsi yang persamaannya $y = \cot x$
Fungsi cosecan	Fungsi cosecan adalah fungsi yang persamaannya $y = \text{cosec}\ x$
Fungsi eksponen	Misal *a* ? 1 bilangan riel positif, maka untuk setiap bilangan riel *x* fungsi *f*: *x* ? a^x disebut fungsi eksponen.
Fungsi injektif	fungsi *f*: X ? Y dikatakan injektif jika tidak ada dua anggota X yang mempunyai bayangan sama di bawah fungsi *f*.
Fungsi kuadrat	Persamaan fungsi kuadrat berbentuk $y = ax^2 + bx + c$
Fungsi linier	Persamaan fungsi linier berbentuk $y = ax + b$.
Fungsi logaritma	Fungsi logaritma adalah fungsi yang bentuk rumusnya $y = {}^a\log x$.
Fungsi onto	Sama dengan fungsi pada
Fungsi pada	fungsi *f*: X ? Y dikatakan fungsi 'pada' jika { *f* (*x*) ?*x* ? X } = Y dengan perkataan lain, range *f* sama dengan codomainnya.
Fungsi satu-satu	Sama dengan fungsi injektif
Fungsi satu-satu onto	Sama dengan fungsi bijektif
Fungsi satu-satu pada	Sama dengan fungsi bijektif

Fungsi secan	Fungsi secan adalah fungsi yang persamaannya $y = \sec x$
Fungsi sinus	Fungsi sinus adalah fungsi yang persamaannya $y = \sin x$
Fungsi surjektif	Sama dengan fungsi injektif
Fungsi tangen	Fungsi tangen adalah fungsi yang persamaannya $y = \tan x$
Fungsi	Fungsi F:D? C merupakan relasi khusus yang menghubungkan semua anggota himpunan D (domain) dengan anggota himpunan C (codomain) secara tunggal.
Garis	Garis adalah grafik dari fungsi linier.
Gradien	Gradien suatu garis adalah tangen sudut yang dibentuk oleh garis dengan sumbu-*x* positif.
Grafik	Grafik suatu fungsi adalah himpunan semua titik yang koordinatnya memenuhi persamaan fungsi.
Parabola	Parabola adalah grafik dari suatu fungsi kuadrat
Pasangan terurut	Urutan a dan b yang tidak dapat ditukar, ditulis (a, b)
Peta	Sama dengan bayangan ditulis R(a) = b
Prapeta	Prapeta b oleh relasi R adalah a,
Range	Sama dengan daerah hasil
Relasi	Relasi dari himpunan A ke himpunan B, dinyatakan sebagai R: A ? B adalah aturan yang menghubungkan *a* ? A dengan *b* ? B
Relasi invers	Setiap relasi ?: *X* ? *Y* mempunyai relasi invers yaitu ?$^{-1}$: ***Y* ? *X*** yang didefinisikan sebagai *x* ?$^{-1}$ *y* ? *y* ? *x* dengan *x* ? *X* dan *y* ? *Y*.
Sejajar	Dua garis sejajar jika gradiennya sama.
Penyelesaian	Penyelesaian suatu persamaan adalah nilai variabel yang membuat suatu persamaan menjadi kesamaan yang benar.
Tegak lurus	Dua garis saling tegak lurus jika hasil kali gradiennya sama dengan -1.

BAB I. PENDAHULUAN

A. Deskripsi

Dalam modul ini Anda akan mempelajari 6 Kegiatan Belajar. Kegiatan Belajar 1 adalah **Relasi dan Fungsi**, Kegiatan Belajar 2 adalah **Fungsi Linier,** Kegiatan Belajar 3 adalah **Fungsi Kuadrat,** Kegiatan Belajar 4 adalah **Fungsi Eksponen,** Kegiatan Belajar 5 adalah **Fungsi Logaritma, dan** Kegiatan Belajar 6 adalah **Fungsi Trigonometri**. Dalam Kegiatan Belajar 1, yaitu Relasi dan Fungsi, akan diuraikan mengenai pengertian relasi, dan fungsi, serta sifat-sifat fungsi. Dalam Kegiatan Belajar 2, yaitu Fungsi Linier, akan diuraikan mengenai bentuk umum fungsi linier, grafik fungsi linier, persamaan garis lurus, titik potong dua garis, syarat tegak lurus dan syarat sejajar, dan invers fungsi linier. Dalam Kegiatan Belajar 3, yaitu Fungsi kuadrat akan diuraikan mengenai bentuk umum fungsi kuadrat, titik potong grafik dengan sumbu koordinat, sumbu simetri dan nilai ekstrim suatu fungsi, dan menentukan persamaan fungsi kuadrat jika diketahui grafik atau unsur-unsurnya. Dalam Kegiatan Belajar 4, yaitu fungsi eksponen, akan diuraikan mengenai pengertian fungsi eksponen, grafik fungsi eksponen, dan penerapan fungsi eksponen. Dalam Kegiatan Belajar 5, yaitu Fungsi Logaritma, akan diuraikan mengenai pengertian fungsi logaritma, grafik fungsi logaritma, dan penerapan fungsi logaritma. Dalam Kegiatan Belajar 6, yaitu Fungsi Trigonometri akan diuraikan mengenai macam-macam fungsi trigonometri beserta grafiknya.

B. Prasyarat

Prasyarat untuk mempelajari modul ini adalah logika dan persamaan.

C. Petunjuk Penggunaan Modul

Untuk mempelajari modul ini, hal-hal yang perlu Anda lakukan adalah sebagai berikut.

1. Pelajari daftar isi serta skema modul dengan cermat, karena daftar isi dan skema akan menuntun Anda dalam mempelajari modul ini dan kaitannya dengan modul-modul yang lain.
2. Untuk mempelajari modul ini haruslah berurutan, karena materi yang mendahului merupakan prasyarat untuk mempelajari materi berikutnya.
3. Pahamilah contoh-contoh soal yang ada, dan kerjakanlah semua soal latihan yang ada. Jika dalam mengerjakan soal Anda menemui kesulitan, kembalilah mempelajari materi yang terkait.
4. Kerjakanlah soal evaluasi dengan cermat. Jika Anda menemui kesulitan dalam mengerjakan soal evaluasi, kembalilah mempelajari materi yang terkait.
5. Jika Anda mempunyai kesulitan yang tidak dapat Anda pecahkan, catatlah, kemudian tanyakan kepada guru pada saat kegiatan tatap muka atau bacalah referensi lain yang berhubungan dengan materi modul ini. Dengan membaca referensi lain, Anda juga akan mendapatkan pengetahuan tambahan.

D. Tujuan Akhir

Setelah mempelajari modul ini diharapkan Anda dapat:

1. menggunakan relasi fungsi dan sifat-sifatnya untuk memecahkan masalah,
2. menggambar grafik fungsi linier,
3. menentukan titik potong dua garis,
4. menentukan kedudukan dua garis,
5. menentukan invers fungsi linier,
6. menggambar grafik fungsi kuadrat,
7. menentukan sumbu simetri dan titik ekstrim suatu fungsi kuadrat,

8. menggunakan fungsi kuadrat untuk menyelesaikan masalah sehari-hari,
9. menggambar grafik fungsi eksponen dan menggunakannya untuk menyelesaikan maslah sehari-hari,
10. menggambar grafik fungsi logaritma dan menggunakannya untuk menyelesaikan maslah sehari-hari,
11. menggambar grafik fungsi trigonometri dan menggunakannya untuk menyelesaikan masalah sehari-hari.

E. Kompetensi

KOMPETENSI : RELASI DAN FUNGSI
PROGRAM KEAHLIAN : program adaptif
KODE : MATEMATIKA/MAT 05
DURASI PEMBELAJARAN : 37 Jam @ 45 menit

SUB KOMPETENSI	KRITERIA KINERJA	LINGKUP BELAJAR	MATERI POKOK PEMBELAJARAN		
			SIKAP	PENGETAHUAN	KETERAMPILAN
1. Mendeskripsikan perbedaan konsep relasi dan fungsi	✍ Konsep relasi digunakan untuk menunjukkan suatu fungsi	✍ Relasi dan Fungsi	✍ Teliti dan cermat dalam menerapkan konsep relasi dan fungsi	✍ Pengertian relasi dan fungsi ✍ Sifat-sifat fungsi (injektif, surjektif, bijektif)	✍ Menggambar grafik relasi dan fungsi
2. Menerapkan konsep fungsi linier	✍ Fungsi linier digambar grafiknya ✍ Konsep fungsi linier diterapkan untuk menentukan persamaan garis lurus ✍ Fungsi invers ditentukan dari suatu fungsi linier	✍ Fungsi Linier dan grafiknya ✍ Persamaan fungsi linier bila diketahui: - Dua titik - Satu titik dan satu gradien, ✍ Hubungan dua buah garis ✍ Invers fungsi linier	✍ Teliti dan cermat dalam menerapkan konsep fungsi linier	✍ Bentuk umum fungsi linier ✍ Grafik fungsi linier ✍ Persamaan garis lurus yang melalui satu titik dengan gradien tertentu ✍ Persamaan garis lurus yang melalui dua titik ✍ Titik potong dua buah garis lurus yang diketahui persamaannya ✍ Syarat hubungan dua garis berpotongan tegak lurus ✍ Syarat hubungan dua garis sejajar ✍ Invers fungsi linier	✍ Menggambar grafik fungsi linier ✍ Menggunakan persamaan fungsi linier

SUB KOMPETENSI	KRITERIA KINERJA	LINGKUP BELAJAR	MATERI POKOK PEMBELAJARAN		
			SIKAP	PENGETAHUAN	KETERAMPILAN
3. Menerapkan konsep fungsi kuadrat	✍ Fungsi kuadrat digambar grafiknya melalui titik ekstrim dan titik potong pada sumbu koordinat ✍ Fungsi kuadrat digunakan dalam menentukan nilai ekstrim	✍ Fungsi kuadrat dan grafiknya	✍ Teliti dan cermat dalam menerapkan konsep fungsi kuadrat	✍ Bentuk umum fungsi kuadrat ✍ Titik potong grafik fungsi dengan sumbu koordinat ✍ Sumbu simetri dan nilai ekstrim suatu fungsi ✍ Titik ekstrim ✍ Menentukan persamaan fungsi kuadrat jika diketahui grafik atau unsur-unsurnya	✍ Menggambar grafik fungsi kuadrat ✍ Menggunakan persamaan fungsi kuadrat
4. Menerapkan konsep fungsi eksponen	✍ Fungsi eksponen dideskripsikan sesuai dengan ketentuan ✍ Fungsi eksponen digambar grafiknya ✍ Fungsi eksponen digunakan untuk menyelesaikan masalah kejuruan	✍ Fungsi eksponen ✍ Grafik fungsi eksponen ✍ Penerapan fungsi eksponen	✍ Teliti dan cermat dalam menerapkan konsep fungsi eksponen	✍ Fungsi eksponen ✍ Grafik fungsi eksponen ✍ Penerapan fungsi eksponen	✍ Menggambar grafik fungsi eksponen
5. Menerapkan konsep fungsi logaritma	✍ Fungsi logaritma dideskripsikan sesuai dengan ketentuan ✍ Fungsi logaritma digambar grafiknya ✍ Fungsi logaritma digunakan untuk menyelesaikan masalah kejuruan	✍ Fungsi logaritma ✍ Grafik fungsi logaritma ✍ Penerapan fungsi logaritma	✍ Teliti dan cermat dalam menerapkan konsep fungsi logaritma	✍ Fungsi logaritma ✍ Grafik fungsi logaritma ✍ Penerapan fungsi logaritma	✍ Menggambar grafik fungsi logaritma
6. Menerapkan konsep fungsi trigonometri	✍ Fungsi trigonometri dideskripsikan sesuai dengan ketentuan ✍ Fungsi trigonometri digambar grafiknya	✍ Fungsi trigonometri ✍ Grafik fungsi trigonometri	✍ Teliti dan cermat dalam menerapkan konsep fungsi trigonometri	✍ Fungsi trigonometri ✍ Menggambar grafik fungsi seperti: $y = \sin x$ $y = a \tan kx$, $y = \cos (x+?)$ $y = a \cos (kx+?)$	✍ Menggambar grafik fungsi trigonometri

F. Cek Kemampuan

Kerjakanlah soal-soal berikut ini. Jika Anda merasa dapat mengerjakan semua soal berikut ini, maka Anda dapat langsung mengerjakan soal-soal Evaluasi pada BAB III.

1. Jelaskan apa perbedaan relasi dan fungsi. Beri contoh masing-masing.
2. Diketahui garis g_1 dan g_2 berturut-turut dengan persamaan $3x + 4y = 7$ dan $4x - 3y = 2$.
   a. Tentukan titik potong kedua garis.
   b. Selidiki apakah kedua garis tersebut saling tegak lurus.
   c. Tentukan persamaan garis yang melalui titik P(3, 0) dan sejajar dengan garis g_1.
3. Tentukan sumbu simetri dan titik ekstrim dari suatu fungsi yang mempunyai persamaan $y = x^2 + 4x - 21$.
4. Sebuah sel selalu membelah menjadi 2 setiap hari. Bila ada sebuah sel, berapa banyak sel pada hari ke 10? Tentukan persamaan fungsi yang menunjukkan pembelahan sel tersebut. Setelah itu, gambarlah grafik fungsinya
5. Gambarlah grafik dari $y = \log(x^2 - 4x + 3)$
6. Selidikilah fungsi $y = \tan x + 4 \cot x$ $(0^0 < x < 90^0)$

BAB II. PEMBELAJARAN

A. RENCANA BELAJAR SISWA

Kompetensi : Mengaplikasikan konsep fungsi.

Sub Kompetensi :
- Mendeskripsikan perbedaan konsep relasi dan fungsi.
- Menerapkan konsep fungsi linier.
- Menerapkan konsep fungsi kuadrat.
- Menerapkan konsep fungsi eksponen.
- Menerapkan konsep fungsi logaritma.
- Menerapkan konsep fungsi trigonometri.

Tulislah semua jenis kegiatan yang Anda lakukan di dalam tabel kegiatan di bawah ini. Jika ada perubahan dari rencana semula, berilah alasannya kemudian mintalah tanda tangan kepada guru atau instruktur Siswa.

Jenis Kegiatan	Tanggal	Waktu	Tempat Belajar	Alasan perubahan	Tanda tangan Guru

B. KEGIATAN BELAJAR

1. Kegiatan Belajar 1

a. Tujuan Kegiatan Pembelajaran 1

Setelah mempelajari kegiatan belajar 1, diharapkan Anda dapat:

- ✍ membedakan relasi dan fungsi, memberi contoh masing-masing, dan menggunakannya dalam kehidupan sehari-hari.
- ✍ menentukan sifat-sifat fungsi, injektif, surjektif, dan bijektif.
- ✍ memberi contoh fungsi, injektif, surjektif, dan bijektif, serta penggunaannya dalam kehidupan sehari-hari.

b. Uraian Materi 1

Dalam kehidupan sehari-hari sering Anda jumpai hubungan antar manusia, misal: anak dari, ayah dari, ibu dari, saudara dari, kakek dari, dan nenek dari. Untuk membicarakan hubungan-hubungan tersebut ada kelompok manusia. Misal untuk membicarakan hubungan ‘anak dari,’ diperlukan kelompok ‘anak’ dan kelompok ‘orang tua.’

Dalam matematika, kelompok disebut dengan himpunan. Himpunan mempunyai anggota. Suatu himpunan dinyatakan dengan huruf capital (huruf besar), misal A, B, C,…. Anggota himpunan dinyatakan dengan huruf kecil, misal a, b, c, …. Untuk menyajikan himpunan dapat dilakukan dengan beberapa cara. Berikut contoh penyajian himpunan.

1) Himpunan A beranggotakan bilangan-bilangan 1, 2, 3. Anda dapat menyajikannya dengan mendaftar anggotanya satu persatu. Kemudian Anda menulisnya sebagai A = { 1, 2, 3 }. Penulisan himpunan seperti cara ini disebut penyajian himpunan dengan cara mendaftar. Perhatikan bahwa anggota yang satu dengan yang lain dipisahkan dengan tanda koma dan diletakkan diantara kurung kurawal { }.

2) Himpunan B adalah himpunan bilangan ganjil. Syarat yang harus dipenuhi oleh anggota himpunan B adalah bilangan ganjil. Untuk menyajikan himpunan B, kita menggunakan huruf kecil, biasanya *x,* untuk menyatakan suatu anggota dan kita menulisnya sebagai B = {*x* ? *x* bilangan ganjil}. Penulisan seperti ini disebut penyajian himpunan dengan menyebut syarat keanggotaannya atau penulisan himpunan dengan notasi pembentuk himpunan. B = {*x* ? *x* bilangan ganjil}, dibaca: 'B adalah himpunan *x* sedemikian hingga *x* bilangan ganjil.' Perhatikan garis tegak '? dibaca 'sedemikian hingga.' Himpunan B dapat pula ditulis dengan cara mendaftar, yaitu: B = { 1, 3, 5, 7, 9,... }. Tiga titik tersebut menunjukkan bahwa setelah 9 masih banyak anggota B yang lain. Anggota-anggota tersebut tidak ditulis satu persatu.

   Bila a anggota himpunan A, maka kita dapat menulisnya sebagai 'a ? A.' Sedangkan jika b bukan anggota B dapat ditulis sebagai 'b ? B.'

1) Pengertian relasi dan Fungsi

Bila ada dua himpunan, Anda dapat mengelompokkan anggota himpunan yang satu dengan himpunan yang lain berdasarkan aturan tertentu. Misal A dan B himpunan. Aturan yang menghubungkan anggota A dengan anggota B disebut **relasi** dari himpunan A ke himpunan B. Bila R suatu relasi dari himpunan A ke himpunan B yang menghubungkan a ? A dengan b ? B, kita dapat menulisnya sebagai R: A ? B atau R: a ? b. Pada relasi ini a disebut **prapeta** b, atau b disebut **peta** atau **bayangan** a. B bayangan a, ditulis sebagai b = R (a), atau a Rb. Himpunan A disebut **daerah asal** atau **domain,** himpunan B disebut **daerah pasangan** atau **codomain,** anggota himpunan B yang merupakan kelompok dari anggota A membentuk suatu himpunan yang disebut **daerah hasil** atau **range**. Jadi range suatu relasi adalah himpunan bagian dari codomain.

<u>Contoh 1:</u>

C adalah himpunan bilangan asli yang kurang dari atau sama dengan 5, yang dapat ditulis dengan cara mendatar sebagai C = { 1, 2, 3, 4, 5 }. D adalah himpunan bilangan genap yang kurang dari 7, yang dapat ditulis dengan cara mendatar sebagai D = { 2, 4, 6 }. Anda dapat mengelompokkan anggota C dengan anggota D dengan relasi R yang berarti faktor dari.

Sehingga didapat:

1 faktor dari 2, yang dapat ditulis sebagai R (1) = 2 atau 1 R 2

1 faktor dari 4, yang dapat ditulis sebagai R (1) = 4 atau 1 R 4

1 faktor dari 6, yang dapat ditulis sebagai R (1) = 6 atau 1 R 6

2 faktor dari 2, yang dapat ditulis sebagai R (2) = 2 atau 2 R 2,

2 faktor dari 4, yang dapat ditulis sebagai R (2) = 4 atau 2 R 4,

2 faktor dari 6, yang dapat ditulis sebagai R (2) = 6 atau 2 R 6,

3 faktor dari 6, yang dapat ditulis sebagai R (3) = 6 atau 3 R 6,

4 faktor dari 4, yang dapat ditulis sebagai R (4) = 4 atau 4 R 4,

3 bukan faktor dari 4, dapat ditulis sebagai R (3) ? 4 atau 3 $\not R$ 4, dibaca 'tiga tidak berrelasi dengan empat.'.

Domain relasi R: C ? D adalah himpunan C, codomain dan rangenya adalah himpunan D.

Relasi dapat dinyatakan dengan berbagai cara, yaitu: sebagai himpunan pasangan terurut, diagram Cartesius, diagram panah, dan rumus. Berikut akan disajikan berbagai cara menyajikan relasi untuk relasi R: C ? D pada contoh 1.

- R sebagai **himpunan pasangan terurut** atau **himpunan pasangan urut.**

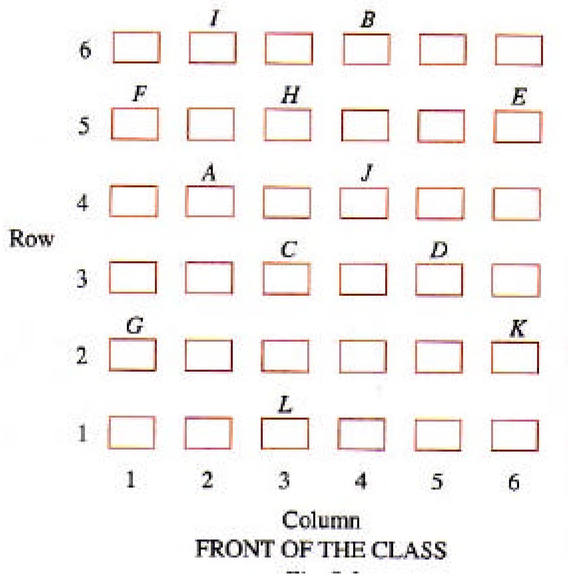
  R: C ? D dengan C = { 1, 2, 3, 4, 5, }, D = { 2, 4, 6 }, dan R 'faktor dari.' R dapat disajikan sebagai himpunan pasangan terurut, R={(1,2), (1, 4), (1, 6), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 6), (4, 4)}.

  Pada pasangan terurut (*a*, *b*), urutan a dan b diperhatikan, artinya: urutan a dan b tidak dapat dibalik. Jadi (*a*, *b*) ? (*b*, *a*). Pada pasangan urut (*a*, *b*), *a* merupakan **komponen pertama** sedangkan *b* merupakan **komponen kedua** dari pasangan urut tersebut. Dua pasangan terurut (a, b) sama dengan (c, d), ditulis '(a, b) = (c, d)' bila dan hanya bila $a = c$ dan $b = d$.

? R sebagai **diagram Cartesius.**

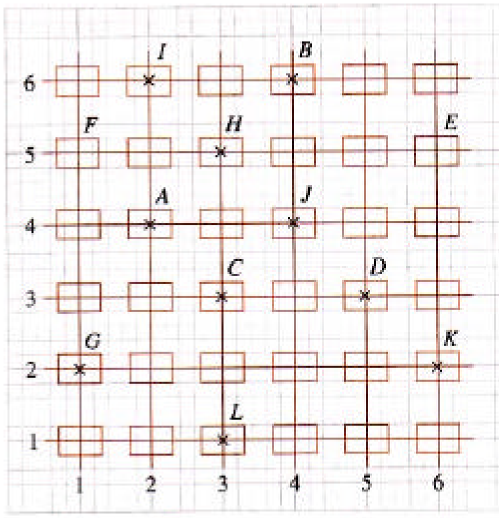
Pernahkah Anda memperhatikan bagaimana tempat duduk di gedung bioskop diatur, di mana letak raja di awal permainan catur, dan letak suatu jalan di peta sebuah kota. Dapatkah Anda menggunakan ide yang sama untuk menentukan letak sebuah bangku di kelas, jika bangku-bangku tersebut diatur menurut baris (*row*) dan kolom (*column*)?

Di awal suatu tahun ajaran baru, biasanya para guru menyiapkan pengaturan tempat duduk para siswa di kelas seperti gambar di samping. Hal ini untuk memudahkan guru mengetahui tempat duduk siswanya. Tempat guru di kelas bagian depan (*front of the class).*



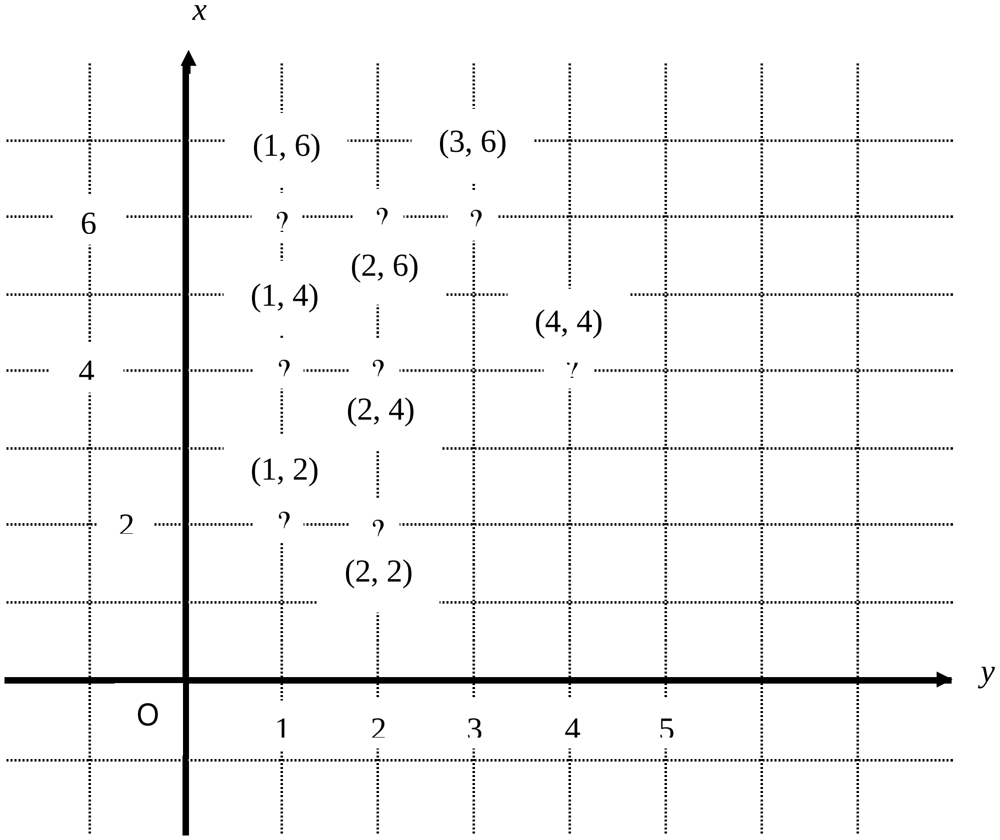
Untuk mengidentifikasi setiap siswa dengan cepat dan mudah, guru dapat mengelompokkan setiap siswa dengan baris dan kolom dimana seorang siswa duduk. Gambar di atas menunjukkan siswa A duduk di kolom 2 baris 4, sementara itu siswa B duduk di kolom 4 baris 6. Guru dapat menulis sebuah pasangan terurut dengan nama siswa di kelas sebagai berikut: A(2, 4) dan B(4, 6). Cobalah Anda menulis pasangan terurut yang sesuai dengan siswa lain. Dari pasangan bilangan (2, 4), Anda tahu bahwa A di kolom 2 dan baris 4. Pasangan bilangan (4, 6) memberitahukan bahwa siswa B di kolom 4 dan baris 6. Cobalah Anda mengidentifikasi tempat duduk siswa yang lain dengan pasangan bilang dan jelaskan makna dari pasangan bilangan tersebut.

Gambar berikut menyajikan rancangan kelas yang sama pada kertas grafik dengan garis mendatar (*horizontal*) dan garis tegak (*vertical*) yang digambar melalui kotak yang menunjukkan posisi siswa. Garis mendatar dan garis tegak bernomor. Jadi bilangan pertama pada setiap pasangan terurut digunakan untuk menyatakan tempat siswa yang mengacu pada skala garis mendatar dan bilangan kedua untuk menyatakan tempat siswa yang mengacu pada skala garis tegak. Untuk menyederhanakan hal ini, Anda dapat mengganti kotak yang menyatakan tempat siswa dengan titik potong kedua garis. Hal ini memberi ide pada Anda untuk menentukan letak titik pada bidang koordinat.



Secara umum, jika titik A sesuai dengan pasangan terurut bilangan (x, y), maka pasangan terurut bilangan (x, y) disebut koordinat titik A dan disajikan sebagai $A(x, y)$. x disebut absis titik A dan y disebut ordinat titik A.

Marilah kita kembali pada $R: C$? D dengan $C = \{ 1, 2, 3, 4, 5, \}$, $D = \{ 2, 4, 6 \}$, dan R 'faktor dari.' Anda telah mengetahui bahwa himpunan pasangan terurut dari R adalah $R = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 6), (4, 4)\}$. Bila R disajikan dengan diagram Cartesius diperoleh diagram Cartesius berikut.

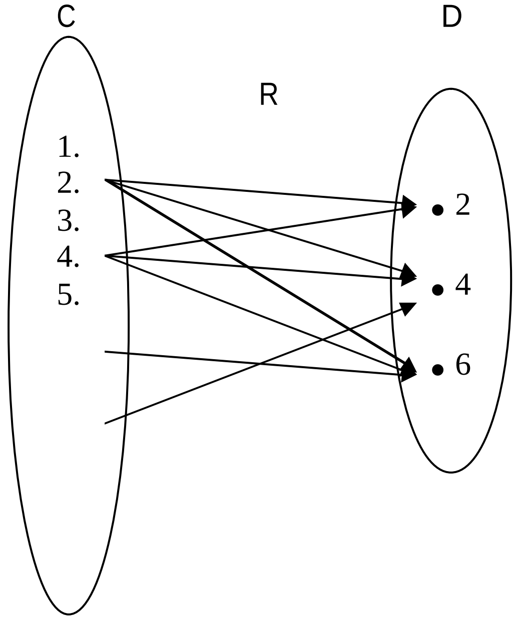


Jadi suatu relasi dapat digambar pada bidang Cartesius, yang merupakan daerah yang memuat dua garis *x* dan *y* yang saling berpotongan tegak lurus. Garis *x* digambar mendatar menggambarkan himpunan C dan garis *y* menggambarkan himpunan D. Anggota-anggota himpunan C dan D yang dinyatakan sebagai titik pada setiap garis. Pasangan urut anggota R merupakan titik pada diagram Cartesius tersebut. Diagram Cartesius suatu relasi disebut **grafik** dari relasi tersebut.

? **Diagram panah**.

Untuk membuat **diagram panah** suatu relasi dibuat anak panah dari daerah asal ke daerah pasangan. Daerah asal dan daerah pasangan digambar sebagai kurva tertutup sederhana. Anggota daerah asal dan daerah pasangan digambar dengan titik dalam kurva tertutup sederhana tersebut. Kurva tertutup sederhana adalah lengkungan yang tertutup dan tidak memotong diri sendiri. Lingkaran, ellips, persegi, dan persegi panjang merupakan contoh-contoh dari kurva tertutup sederhana. Berikut adalah diagram panah relasi R di atas.

R: C ? D dengan C = { 1, 2, 3, 4, 5, }, D = { 2, 4, 6 }, dan R 'faktor dari.' R dapat disajikan dengan diagram panah berikut.



? Relasi R di atas, dapat pula disajikan dalam **bentuk rumus.** Bentuk rumusnya adalah b = n a dengan b? D, a ? C, dan n bilangan asli.

Tidak semua relasi dapat disajikan dengan keempat cara tersebut.

<u>Contoh 2:</u>

Marilah sekarang kita membuat relasi dari himpunan D ke himpunan C di atas, yaitu relasi F: D ? C yang memasangkan anggota D ke anggota C dengan aturan satu lebihnya dari. Dengan demikian

2 satu lebihnya dari 1, yang dapat ditulis sebagai F (2) = 1 atau 2 R 1,

4 satu lebihnya dari 3, yang dapat ditulis sebagai F (4) = 3 atau 4 R 3,

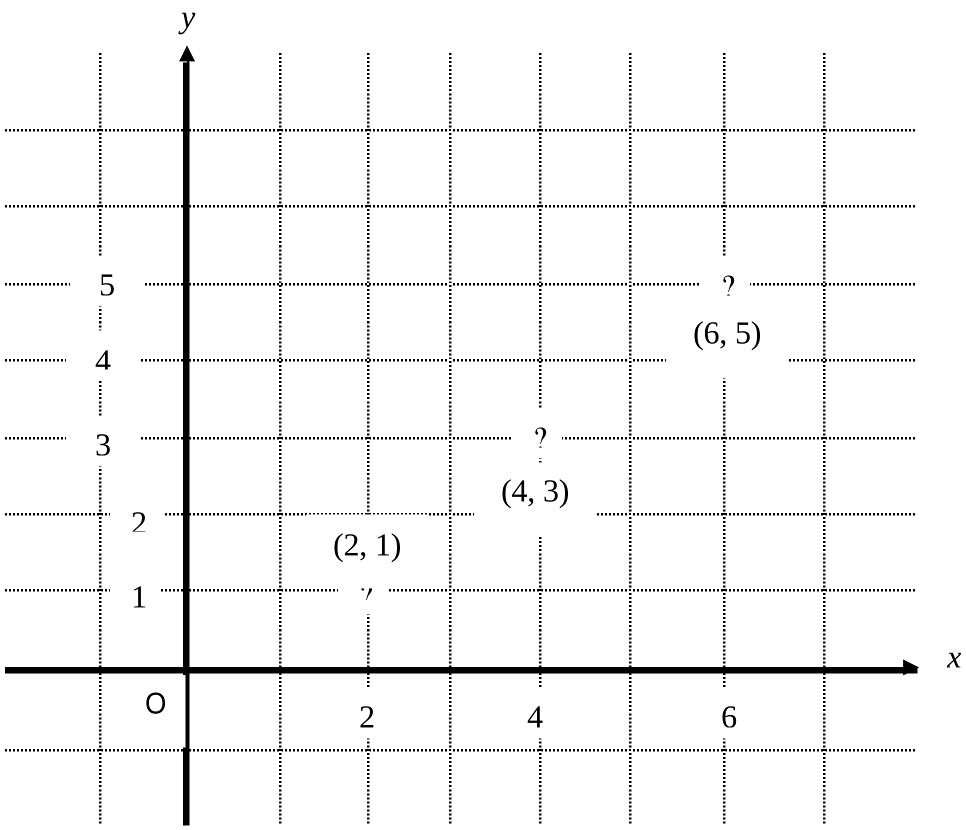
6 satu lebihnya dari 5, yang dapat ditulis sebagai F (6) = 5 atau 6 R 5,

Dengan relasi F, ternyata semua anggota himpunan D, domain, mempunyai pasangan di codomain, himpunan C, dan pasangannya tunggal. Relasi F seperti ini merupakan relasi khusus, yang disebut

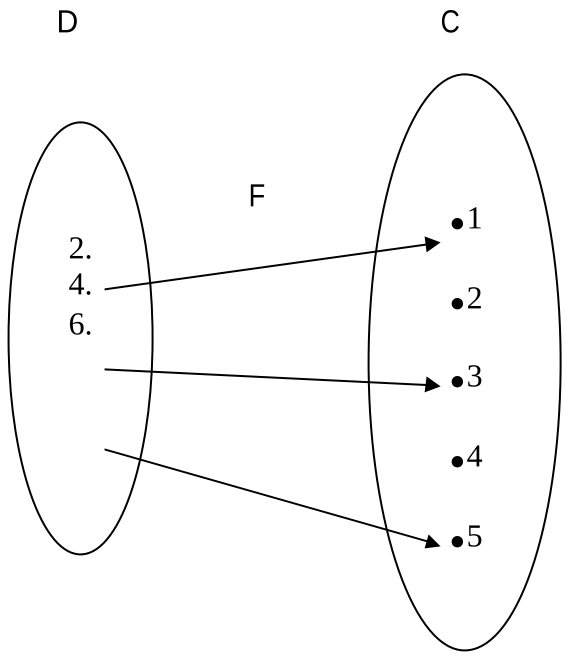
fungsi. Fungsi F: D ? C adalah relasi yang menghubungkan semua anggota D dengan anggota C secara tunggal. Seperti halnya relasi, fungsi juga dapat disajikan dengan himpunan pasangan terurut, diagram Cartesius, diagram panah, dan rumus. Himpunan pasangan terurut, diagram Cartesius, diagram panah, dan rumus dari F: D ? C sebagai berikut:

? Himpunan pasangan terurut dari F: D ? C dengan D = {2, 4, 6}, C = { 1, 2, 3, 4, 5 }, dan F ‘satu lebihnya dari’ adalah:
F = { (2, 1), (4, 3), (6, 5)}.

? Diagram Cartesius dari dari F: D ? C dengan D = {2, 4, 6}, C = { 1, 2, 3, 4, 5 }, dan F ‘satu lebihnya dari’ adalah:



? Diagram panah dari F: D ? C dengan D = {2, 4, 6}, C = {1, 2, 3, 4, 5}, dan F ‘satu lebihnya dari’ adalah:



? Bentuk rumus dari F: D ? C dengan C = { 1, 2, 3, 4, 5 },
D = {2, 4, 6}, dan F 'satu lebihnya dari' adalah: $y = x + 1$, dengan y ? D dan x ? C.

Suatu fungsi dapat pula dinyatakan dengan huruf abjad kecil, misal *f, g, h,* atau dengan huruf Yunani, misal ? (rho), ? (sigma), ? tau). Anda dapat menentukan suatu relasi merupakan fungsi atau bukan dari grafiknya pada bidang Cartesius. Suatu grafik pada bidang Cartesius merupakan **grafik suatu fungsi** *f*: x ? Y jika pada setiap titik *a* pada domain dibuat garis vertikal $x = a$ memotong garfik tepat pada satu titik.

<u>Contoh 3:</u>

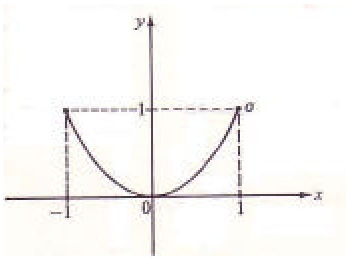
Gambarlah grafik dari relasi relasi berikut.

? : x ? y dengan $y = x^{2,}$ -1 ? x ? 1,

?: x ? y dengan $y^2 = x$, -1 ? x ? 1.

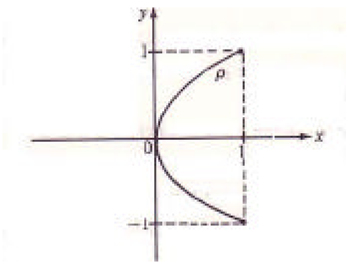
Penyelesaian:

Grafik dari ? : x ? y dengan $y = x^2$, -1 ? x ? 1 adalah parabola berikut.



Dari grafik ini terlihat bahwa untuk setiap titik a pada domain dibuat garis vertikal $x = a$ memotong garfik tepat pada satu titik. Jadi dari grafik dari ? : x ? y dengan $y = x^2$, -1 ? x ? 1, Anda dapat menentukan bahwa ? : x ? y dengan $y = x^2$, -1 ? x ? 1 merupakan suatu fungsi.

Grafik dari ?: x ? y dengan $y^2 = x$, -1 ? x ? 1 adalah parabola berikut.



Dari grafik ini terlihat bahwa untuk titik 1 pada domain jika dibuat garis vertikal $x = 1$ memotong grafik di dua titik. Jadi dari grafik dari ?: x ? y dengan $y^2 = x$, -1 ? x ? 1, Anda dapat menentukan bahwa ?: x ? y dengan $y^2 = x$, -1 ? x ? 1 bukan fungsi.

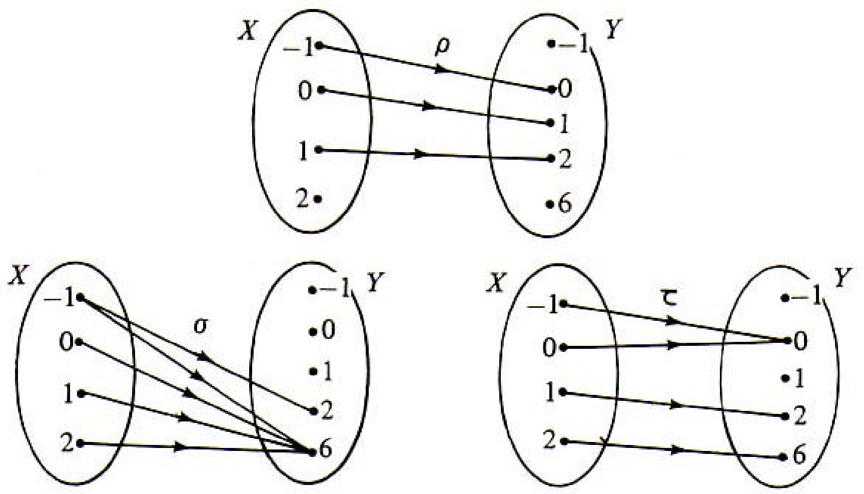
Contoh 4:

Misal ?, ?, dan ?, adalah relasi-relasi dari himpunan X = { -1, 0, 1, 2 } ke himpunan Y = { -1, 0, 1, 2, 6 } yang didefinisikan sebagai

x ? *y* ? *y* = *x* + 1; *x* ? *y* ? *y* ? *x* + 3; *x* ? *y* ? *y* = $x^2 + x$

Tentukan mana di antara relasi-relasi tersebut yang merupakan fungsi dari himpunan X ke Y.

Penyelesaian: Diagram panah dari relasi-relasi tersebut sebagai berikut.



Relasi ? bukan fungsi dari X ke Y karena tidak ada y ? Y yang berelasi dengan 2 ? X.

Relasi ? bukan fungsi dari X ke Y karena ada dua anggota Y (2 dan 6) yang berrelasi dengan –1 ? X.

Relasi ? merupakan fungsi karena setiap *x* ? X berpasangan tunggal dengan *y* ? Y.

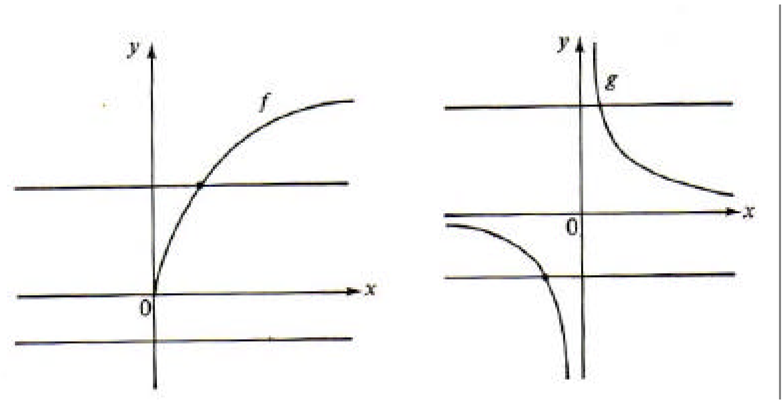
2) Sifat-sifat fungsi

Perhatikan fungsi *f*: X ? Y dan *g*: X ? Y dengan

f : x ? $\sqrt{x}$ dengan *x* ? o dan

g: f: *x* ? $\frac{1}{x}$ dengan *x* ? 0.

Untuk setiap grafik dua fungsi tersebut, suatu garis mendatar $y = b$ yang digambar pada bidang Cartesius memotong grafik paling banyak di satu titik. Dengan kata lain garis memotong grafik di satu titik atau tidak memotong, seperti yang ditunjukkan pada gambar berikut.

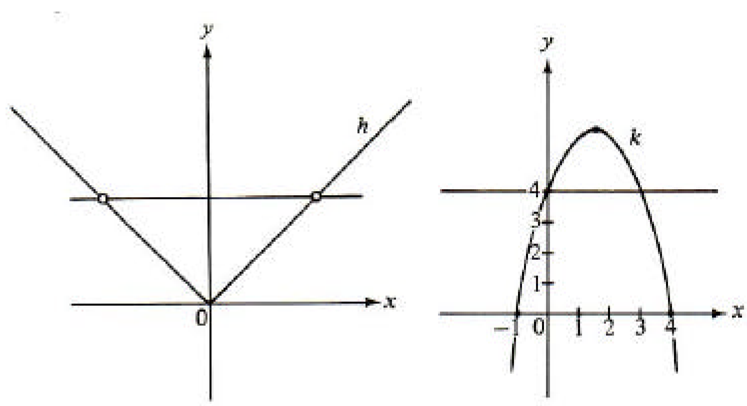


Jika anda memilih suatu garis horisontal $y = b$ dengan b anggota range fungsi, maka garis tersebut memotong setiap fungsi di tepat satu titik. Fungsi f dan g merupakan contoh **fungsi satu-satu** atau **injektif**. Sekarang perhatikan fungsi

h: x ? ?x ? dengan x bilangan riel dan

k: x ? $4 + 3x - x^2$ dengan x bilangan riel.

Perhatikan bahwa suatu garis mendatar yang melalui titik di range memotong grafik kedua fungsi di lebih dari satu titik seperti dapat dilihat pada gambar berikut.



Fungsi *h* dan *k* bukan fungsi satu-satu, mereka contoh dari fungsi bernilai banyak.

Suatu fungsi *f*: X ? Y dikatakan fungsi satu-satu atau injektif jika tidak ada dua anggota X yang mempunyai bayangan sama di bawah fungsi *f*. Dengan kata lain, suatu fungsi *f*: X ? Y merupakan fungsi-satu, bila memenuhi: Misal x_1 dan x_2 anggota X, maka $x_1 ? x_2 ? f(x_1) ? f(x_2)$. Anda dapat juga mengatakan bahwa suatu *f*: X ? Y merupakan fungsi-satu, bila memenuhi: Misal x_1 dan x_2 anggota X, maka $f(x_1) = f(x_2) ? x_1 = x_2$ (kontraposisi dari $x_1 ? x_2 ? f(x_1) ? f(x_2)$).

Contoh 5:

Tentukan mana di antara fungsi-fungsi pada himpunan bilangan riel berikut yang merupakan fungsi satu-satu.

$f: x ? x$,

$g: f: x ? 2$,

$h: x ? 2x + 1$,

$k: x ? ?x ?$

Penyelesaian:

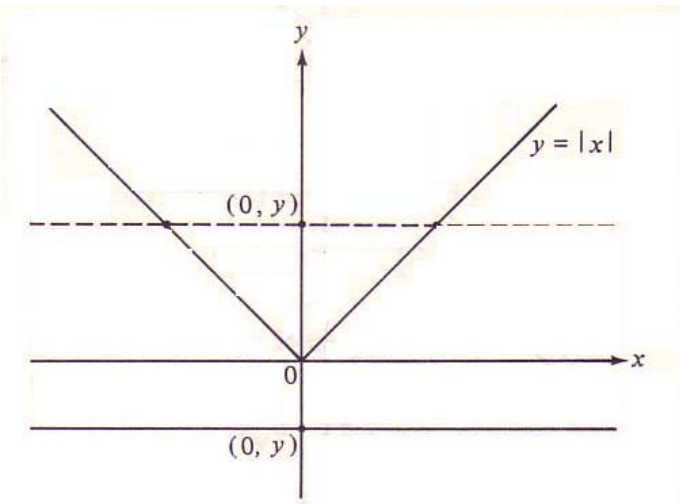
Fungsi *f* dan *h* merupakan fungsi satu-satu sedangkan *g* dan *k* bukan fungsi satu-satu.

Cobalah anda selidiki kebenaran penyelesaian tersebut dengan menggambar grafik fungsi masing-masing.

Suatu fungsi *f*: X ? Y kadang-kadang dikatakan 'X **into** (ke) Y.' Seperti anda ketahui, range dari suatu fungsi merupakan himpunan bagian dari codomain funfsi tersebut. Pada kejadian khusus, di mana range fungsi sama dengan codomain, fungsi tersebut dikatakan **fungsi onto** atau **fungsi pada**. Suatu fungsi *f*: X ? Y dikatakan 'onto' atau 'onto Y' jika $\{ f(x) ? x ? X \} = Y$. Jadi suatu fungsi *f* dikatakan onto, jika setiap elemen pada codomain juga merupakan elemen pada range *f*. Dengan kata lain, untuk setiap $y ?$ Y paling sedikit merupakan pasangan dari satu anggota X sedemikian hingga $f(x) = y$. Suatu fungsi onto juga dikatakan **fungsi surjektif** atau **surjection.**

Untuk melihat apakah *f*: X ? Y onto, anda dapat juga menggunakan grafiknya. Anggaplah X dan Y ? R. Grafik *f* dapat digambarkan pada bidang Cartesius. misal *y* ? Y kemudian gambar suatu garis mendatar melalui titik (0, *y*). Jika garis ini memotong grafik paling sedikit pada satu titik untuk setiap nilai *y*, maka setiap *y* ? Y berpasangan dengan paling sedikit satu titik di grafik tersebut, dan paling sedikit satu titik *x* ? X dengan *y* = *f* (*x*). Dengan kata lain hal ini mengakibatkan bahwa *f* onto.

Perhatikan bahwa codomain ***f*** adalah R dan range-nya adalah {*y*? R?*y* ? 0}. Karena range *f* tidak sama dengan codomain *f*, maka *f* bukan fungsi onto di R. Secara geometrik, hal ini dapat dilihat bahwa suatu garis mendatar yang melalui (0, *y*) dengan *y* ? 0 tidak memotong grafik.



Suatu fungsi *f*: X ? Y yang satu-satu (injektif) dan onto (surjektif) dikatakan **fungsi satu-satu onto** atau **fungsi satu-satu pada** atau **fungsi bijektif.**

Contoh 6:

Misal A = {-1, 0, 1, 2}, B = { 0, 1, 4, 7 }, C = { 0, 1, 2 } dan D = { 0, 1, 4 }. Fungsi *f*: A ? B, *g*: C ? B, *h*: A ? D yang didefinisikan sebagai berikut.

f: x ? x^2,

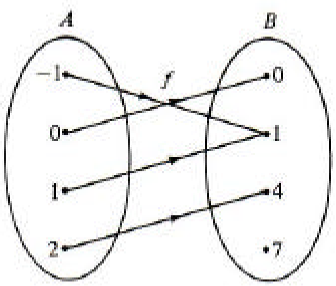
g: x ? x^2,

h: x ? x^2.

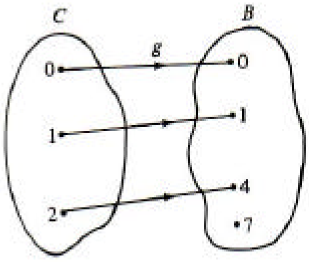
Apakah fungsi-fungsi tersebut satu-satu pada?

Penyelesaian.

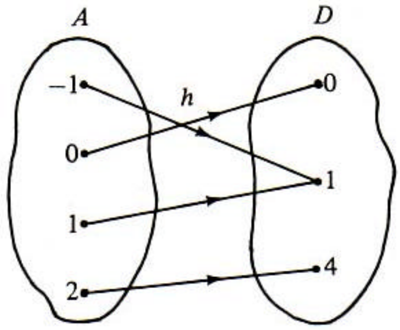
Berikut ini adalah diagram panah dari fungsi-fungsi tersebut.



Dari diagram panah *f*: A ? B, dengan *f*: x ? x^2, dapat dilihat bahwa *f* bukan fungsi satu-satu dan *f* bukan fungsi pada.



Dari diagram panah *g:* C ? B, dengan *g*: x ? x^2, dapat dilihat bahwa *g* adalah fungsi satu-satu yang bukan fungsi pada.



Dari diagran panah *h*: A ? D dengan *h*: *x* ? x^2 dapat dilihat bahwa *h* bukan fungsi satu-satu tetapi fungsi pada.

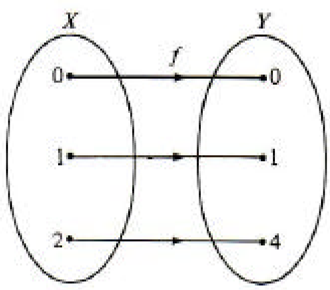
<u>Contoh 7:</u>

Misal X = { 0, 1, 2 }, dan Y = { 0, 1, 4,}. Fungsi *f*: X ? Y yang didefinisikan sebagai *f*: *x* ? x^2.

Apakah *f* suatu fungsi satu-satu pada?

<u>Penyelesaian:</u>

Berikut adalah diagram panah dari *f*: X ? Y dengan *f*: *x* ? x^2.



Dari diagram panah tersebut dapat dilihat bahwa *f*: X ? Y dengan *f*: *x* ? x^2 adalah fungsi satu-satu pada.

c. Rangkuman 1

Relasi R dari himpunan A ke himpunan B, dinyatakan sebagai

R: A ? B adalah aturan yang mengelompokkan *a* ? A dengan *b* ? B. Jika *a* berrelasi R dengan *b*, ditulis sebagai *a* R *b*. a adalah **prapeta** *b* dan *b* adalah **peta** atau **bayangan** a oleh relasi R ditulis b = R (a)Jika c tidak berrelasi R dengan d, ditulis $c\ R\ d$. Himpunan A disebut **daerah asal** atau **domain** dan B disebut **daerah pasangan** atau **codomain**. Anggota codomain yang menjadi bayangan $a \in$ A membentuk himpunan yang disebut sebagai **daerah hasil** atau **range**. Range merupakan himpunan bagian dari codomain.

Relasi dapat disajikan dalam bentuk himpunan pasangan terurut, diagram Cartesius atau grafik, diagram panah, atau rumus.

Pada **pasangan terurut** (a, b), urutan a dan b diperhatikan. a disebut **komponen pertama** dan ***b*** disebut **komponen kedua.**

Fungsi adalah relasi yang menghubungkan setiap anggota domain secara tunggal dengan anggota codomain.

Suatu fungsi f: X $\rightarrow$ Y dikatakan **fungsi satu-satu** atau **injektif** jika tidak ada dua anggota X yang mempunyai bayangan sama di bawah fungsi f.

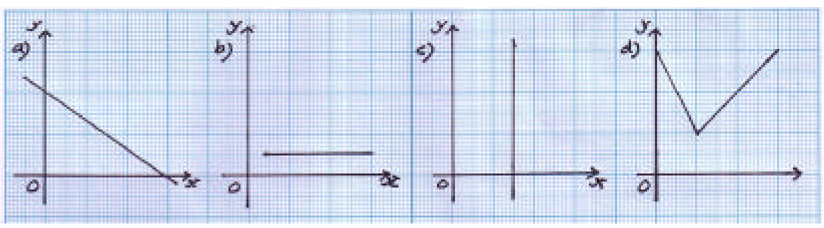
Suatu fungsi f: X $\rightarrow$ Y dikatakan '**onto**' atau '**onto Y**' atau '**pada'** atau **surjektif** jika $\{ f(x) \mid x \in X \} = Y$ dengan perkataan lain, range f sama dengan codomainnya.

Suatu fungsi f: X $\rightarrow$ Y yang satu-satu (injektif) dan onto (surjektif) dikatakan **fungsi satu-satu onto** atau **fungsi satu-satu pada** atau **fungsi bijektif.**

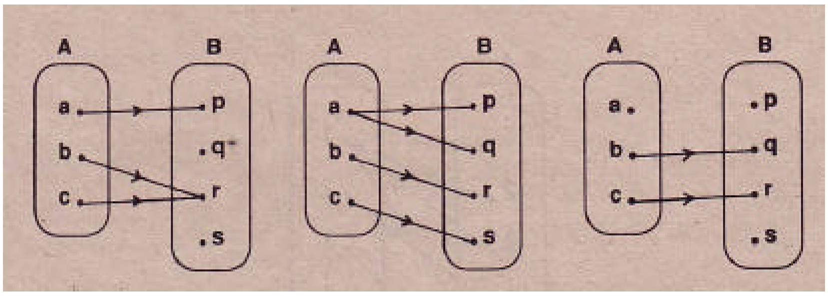
d. Tugas 1

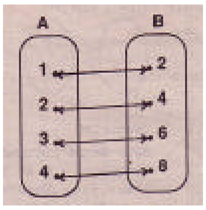
Kerjakan soal-soal berikut dengan cermat.

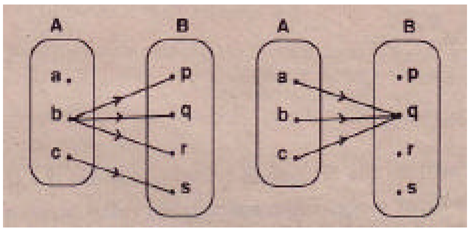
1) Manakah di antara grafik berikut yang merupakan grafik dari suatu fungsi. Jika ada yang bukan fungsi, jelaskan mengapa.



2) Manakah di antara diagram panah berikut yang merupakan diagram panah suatu fungsi dari himpunan A ke himpunan B? Jika ada yang bukan fungsi, jelaskan mengapa.







3) Jika di antara grafik pada soal no 1 ada yang merupakan grafik fungsi, tentukan fungsi yang satu-satu, fungsi pada, dan fungsi satu-satu pada. Begitu juga dengan diagram panah pada soal nomor 3.

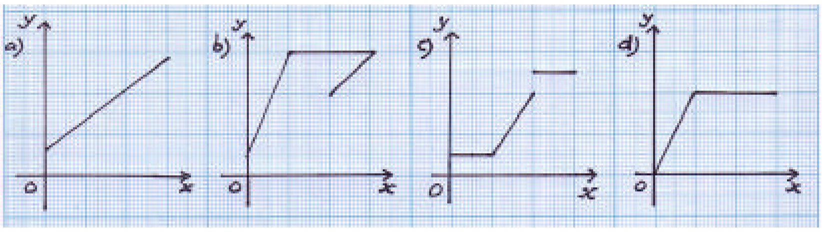
4) Jika A himpunan yang anggotanya ayah dan B himpunan yang anggotanya anak. R relasi dari himpunan A ke himpunan B dengan R ‘ayah dari’. Q relasi dari himpunan B ke himpunan A dengan Q ‘anak dari.’ Selidiki adakah di antara P dan Q yang merupakan fungsi? Jika ada, apakah fungsi tersebut merupakan fungsi satu-satu pada. Jelaskan jawabanmu.

5) Buatlah contoh fungsi yang:
   a) satu-satu,
   b) pada,
   c) satu-satu pada.

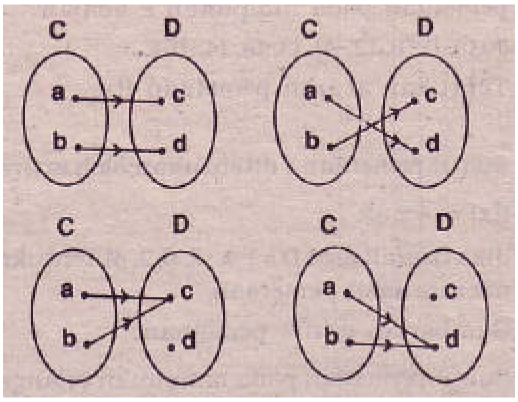
e. Tes Formatif 1

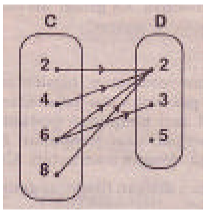
Kerjakan soal-soal berikut dengan cermat.

1) Manakah di antara grafik berikut yang merupakan grafik dari suatu fungsi. Jika ada yang bukan fungsi, jelaskan mengapa.



2) Manakah di antara diagram panah berikut yang merupakan diagram panah suatu fungsi dari himpunan C ke himpunan D? Jika ada yang bukan fungsi, jelaskan mengapa.

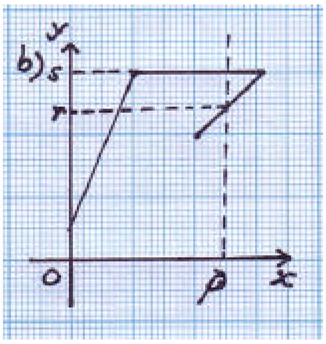


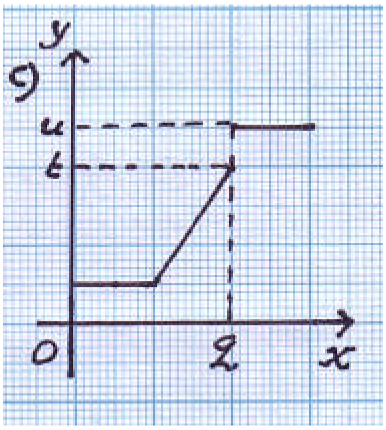


3) Jika di antara grafik pada soal no 1 ada yang merupakan grafik fungsi, tentukan fungsi yang satu-satu, fungsi pada, dan fungsi satu-satu pada. Begitu juga dengan diagram panah pada soal nomor 3.

f. Kunci Jawaban Tes Formatif 1

1) Grafik yang bukan fungsi adalah grafik pada soal b) dan c), karena ada anggota domain yang bayangannya tidak tunggal.



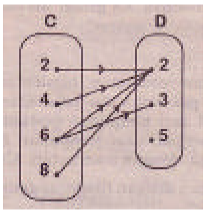


Dari grafik pada soal b) dapat dilihat bahwa untuk p ? X, p mempunyai dua bayangan, yaitu r dan s anggota Y.

Dari grafik pada soal c) dapat dilihat bahwa untuk q ? X, q mempunyai dua bayangan, yaitu u dan t anggota Y.

Sedangkan grafik pada soal a) dan d) merupakan grafik fungsi.

2) Di antara diagram panah pada soal ini yang bukan fungsi adalah



karena 6 ? C mempunyai dua pasangan di D, yaitu 2 dan 3.

Sedangkan diagram panah yang lain merupakan diagram panah fungsi.

3) Untuk soal nomor 1)

Fungsi yang satu-satu adalah fungsi yang grafiknya pada soal a).

Fungsi yang pada adalah fungsi yang grafiknya pada soal a).

Mengapa fungsi yang grafiknya pada soal d) bukan fungsi pada?

Fungsi yang satu-satu pada adalah fungsi yang grafiknya pada soal a).

Untuk soal nomor 2)

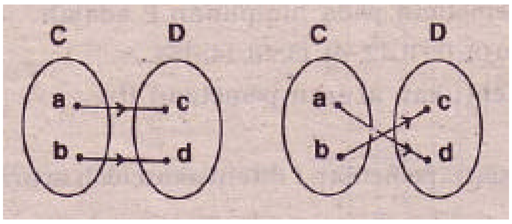


Diagram panah di atas adalah diagram panah fungsi satu-satu pada.

Bagimana dengan fungsi yang lain?

2. Kegiatan Belajar 2

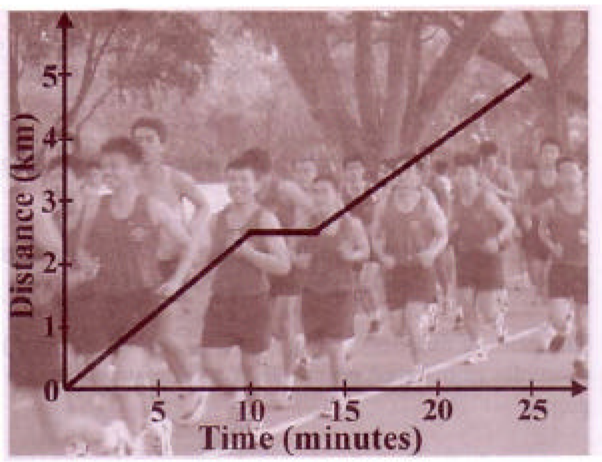
a. Tujuan Kegiatan Belajar 2

Setelah mempelajari kegiatan belajar 2, diharapkan Anda dapat:

- ✍ memahami bentuk umum fungsi linier dan menggambar grafiknya,
- ✍ menentukan persamaan garis yang
  - • melalui satu titik dengan gradien tertentu,
  - • melalui dua titik.
- ✍ menentukan titik potong dua garis,
- ✍ menentukan kedudukan dua garis (sejajar dan saling tegak lurus)
- ✍ menentukan invers fungsi linier,
- ✍ menggunakan fungsi linier dalam kehidupan sehari-hari.

b. Uraian Materi 2

1) Bentuk umum fungsi linier dan grafik



Grafik fungsi linier banyak digunakan dalam keadaan sehari-hari. Contoh, pada gambar di samping, grafik fungsi linier digunakan untuk menyatakan hubungan antara waktu (*time*), dalam menit (*minutes*), dengan jarak (*distance*), dalam kilometer (km).

Anda telah mempelajari bahwa penyelesaian suatu persamaan dengan satu variabel, seperti: $2x + 8 = 16$, dan $2(x - 3) = 4(3x + 4)$. Setiap persamaan mempunyai tepat satu penyelesaian. Sebagai contoh, penyelesaian atau nilai dari variabel x yang memenuhi persamaan $2x + 8$

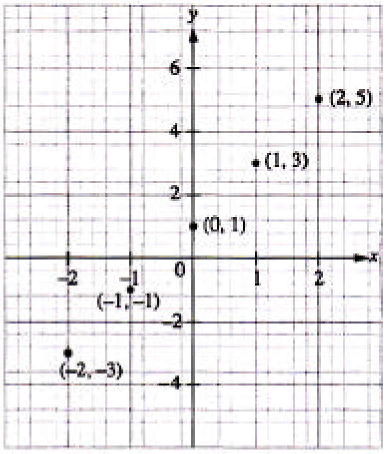
= 16 adalah 4. Ini dapat dinyatakan dengan sebuah titik pada garis bilangan seperti gambar berikut.

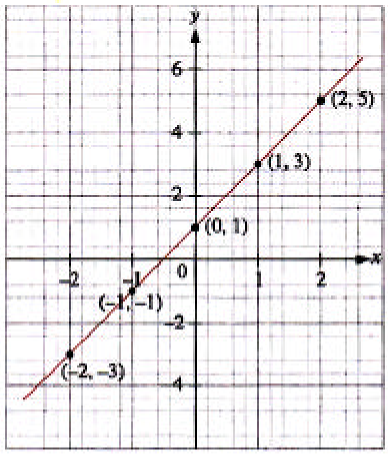
Anda juga telah mempelajari penyelesaian dari persamaan linier dengan dua variabel, misal $y = 2x + 1$. Penyelesaian dari persamaan $y = 2x + 1$ adalah **pasangan terurut** bilangan x dan y yang memenuhi persamaan tersebut. Jika Anda memilih $x = 1$, maka Anda memperoleh $y = 2 \times 1 + 1 = 3$. Jadi pasangan terurut $x = 1$ dan $y = 3$ memenuhi persamaan $y = 2x + 1$ dan merupakan penyelesaian persamaan tersebut. Anda tahu bahwa Anda dapat memperoleh tak hingga penyelesaian untuk persamaan $y = 2x + 1$ dengan memilih harga x dan kemudian menentukan harga y yang sesuai dengan harga x. Jelaslah Anda tidak dapat mendaftar semua penyelesaian persamaan $y = 2x + 1$. Dapatkah Anda menenmukan cara untuk menyatakan secara geometri penyelesaian dari persamaan $y = 2x + 1$?

Tabel berikut menunjukkan lima penyelesaian persamaan $y = 2x + 1$.

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2x + 1$	-3	-1	1	3	5

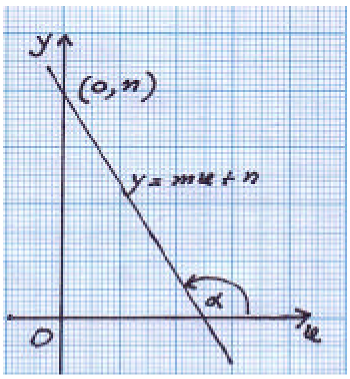
Jika kelima pasangan terurut bilangan (x, y) yang disajikan pada tabel di atas digambar pada bidang Cartesius, diperoleh gambar berikut, yang di kiri. Dapatkah Anda menentukan pola yang dibentuk oleh titik-titik tersebut? Di gambar yang sebelah kanan Anda dapat melihat garis lurus, yang selanjutnya sering disebut sebagai garis, yang digambar melalui kelima titik tersebut.





Garis tersebut disebut **grafik** dari garis yang persamaannya, sering disebut garis, $y = 2x + 1$. Setujukah Anda bahwa setiap pasangan bilangan (x, y) yang memenuhi persamaan $y = 2x + 1$ menyatakan sebuah titik yang terletak pada garis dan setiap titik pada garis koordinatnya memenuhi persamaan $y = 2x + 1$? **Grafik** suatu persamaan adalah himpunan semua titik yang koordinatnya memenuhi persamaan.

Grafik setiap persamaan linier dengan dua variabel berupa sebuah garis lurus. Karena dua titik menentukan sebuah garis, Anda memerlukan dua pasangan terurut yang memenuhi persamaan untuk menggambar grafik garis. Anda dapat menggunakan pasangan urut yang ketiga untuk mengecek. Secara umum persamaan garis dapat dinyatakan sebagai ***y* = *mx* + *n*.** Pada garis dengan persamaan $y = mx + n$, m merupakan **gradien**, atau kemiringan garis dan titik dengan koordinat $(0, n)$ merupakan titik potong garis dengan sumbu y. Gradien sebuah garis adalah **tangen** sudut yang dibentuk oleh garis dengan sumbu x positif.



Pada gambar di samping, terlihat bahwa titik $(0, n)$ adalah titik potong garis dengan sumbu y dan sudut yang dibentuk oleh garis dengan sumbu x positif adalah sudut ? . Jadi gradien garis, yaitu m = tan ? .

<u>Contoh 1:</u>

Tentukan gradien dan titik potong garis yang persamaannya $y = -2x + 5$ dengan sumbu y.

Penyelesaian:

Persamaan garis $y = -2x + 5$, maka gradien garis = -2 dan titik potongnya dengan sumbu y adalah titik (0, 5).

Anda dapat pula menyajikan persamaan garis dalam **bentuk umum,** yaitu $\boldsymbol{Ax + By + C = 0}$. Untuk menentukan gredien dan titik potong garis ini dengan sumbu y, Anda perlu mengubah persamaan tersebut menjadi bentuk $y = mx + n$, sehingga didapat $y = -\frac{A}{B}\,\boldsymbol{x} - \frac{C}{B}$ dengan syarat B ? 0. Jadi gradien garis $-\frac{A}{B}$ dan titik potongnya dengan sumbu x adalah titik $(0, -\frac{C}{B})$.

Sebelum Anda menggambar suatu grafik, Anda perlu memilih skala yang cocok. Jika skala dari suatu grafik yang akan digambar diketahui, Anda tinggal mengikutinya. Tetapi jika tidak, Anda dapat mengikuti petunjuk berikut.

a) Gunakan skala yang sesuai untuk sumbu x dan sumbu y. Contoh, 1 cm untuk menyatakan 1 satuan, 2 satuan 4 satuan, 5 satuan, atau 10 satuan. Hindari penggunaan skala seperti 1 cm untuk menyatakan 2,3 satuan atau 7 satuan.

b) Skala untuk sumbu x tidak perlu sama dengan skala pada sumbu y. Misal, Anda dapat menggunakan 1 cm untuk menyatakan 2 satuan pada sumbu x dan 1 cm untuk menyatakan 5 satuan pada sumbu y.

c) Pilihlah skala yang sesuai sehingga grafik tidak lebih dari setengah ukuran kertas. Dari grafik yang besar, Anda dapat memperkirakan perhitungan kasar dengan lebih mudah untuk menentukan nilai suatu variabelnya, jika nilai untuk variabel yang lain diketahui.

Contoh 2:

Gambarlah grafik dari $y = 3x - 1$. Dari grafik tersebut, tentukan nilai dari:

a) y jika x = -0,8 dan 1,3,

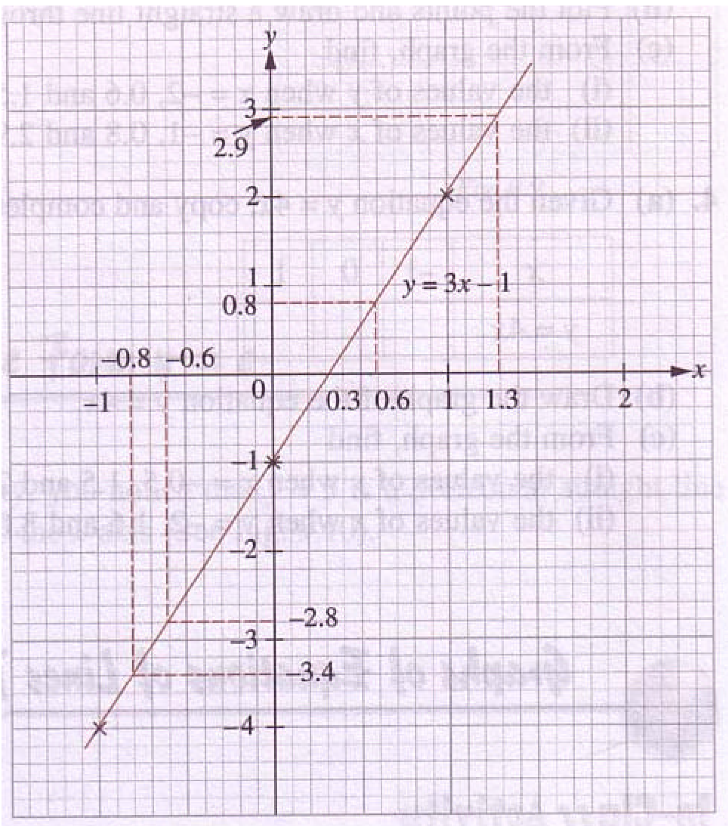
b) x jika y = -2,8, 0, dan 0,8.

Penyelesaian:

Tabel berikut menunjukkan nilai x dari -1 sampai 1 dan nilai y yang sesuai dengannya.

x	-1	0	1
$y = 3x - 1$	*-4*	*-1*	*2*

Gambar berikut menunjukkan grafik dari $y = 3x - 1$.



a) Untuk menentukan nilai y jika x = -0,8, kita gambar garis tegak dari sumbu mendatar dimana x = 0,8 sehingga memotong grafik. Dari titik potong ini, buat garis mendatar hingga memotong sumbu tegak.

Bacalah nilai y pada sumbu y. Dari grafik, di dapat, di dapat y = -3,4 jika x = -0,8. Dengan cara serupa y = 2,9 jika x = 1,3.

b) Untuk menentukan nilai x, jika y = -2,8, kita gambar garis mendatar dari sumbu tegak dimana y = -2,8 sehingga memotong grafik. Dari titik potong ini, buat garis tegak hingga memotong sumbu mendatar. Bacalah nilai x pada sumbu x. Dari grafik, di dapat, di dapat x = -0,6 jika y = -2,8. Dengan cara serupa x = 0,6 jika y = -2,8. Dengan cara sama x ? 0,3 jika y = 0 dan x = 0,6 jika y = 0,8.

Dapatkah Anda memeriksa keakuratan hasil di atas dengan menggunakan persamaan $y = 3x - 1$ untuk menentukan nilai y?

2 a) *Persamaan garis yang melalui satu titik dengan gradien tertentu*

Jika diketahui suatu persamaan garis, Anda sudah dapat menentukan gradien garis dan titik pototng garis tersebut dengan sumbu y. Sekarang marilah kita menentukan persamaan garis dengan gradien tertentu dan melalui satu titik tertentu. Misal garis yang akan kita tentukan persamaannya bergradien m dan melalui titik (x_1, y_1). Persamaan garis yang bergradien m adalah $y = mx + n$. Garis ini melalui titik (x_1, y_1), berarti $y_1 = mx_1 + n$ atau $n = y_1 - mx_1$. Dengan mensubstitusikan $n = y_1 - mx_1$ ke $y = mx + n$, Anda memperoleh $y = mx + y_1 - mx_1$. Persamaan $y = mx + y_1 - mx_1$ dapat Anda ubah menjadi $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Jadi persamaan **garis** yang **bergradien *m*** dan **melalui titik (x_1, y_1)** adalah $\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}$.

<u>Contoh 3:</u>

Tentukan persamaan garis yang bergradien -1 dan melalui titik (-2, 3).

<u>Penyelesaian:</u>

Persamaan garis yang bergradien m dan melalui titik (x_1, y_1) adalah

$\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}$.

Jadi persamaan garis bergradien -1 dan melalui titik (-2, 3) adalah

y* - 3 = -**1{*x* - (-2)} atau ***y* - 3 = -**1{*x* + 2} atau ***y* - 3 = -**1*x* -2 atau ***y* = -x* + 1.

b) Persamaan garis yang melalui dua titik

Suatu garis dapat ditentukan bila diketahui dua ttitik yang terletak pada garis tersebut. Sekarang kita akan menentukan persamaan garis yang melalui titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2). Garis yang melalui titk (x_1, y_1) adalah ***y* - y_1 = *m*** (x - x_1). Garis ini melalui titik (x_2, y_2), berarti ***y_2* - *y_1* = *m*** x_2 - x_1) atau m = $\frac{y_2 ? y_1}{x_2 ? x_1}$. Selanjutnya substitusikan m = $\frac{y_2 ? y_1}{x_2 ? x_1}$ ke ***y* - *y_1* = *m*** (x - x_1) sehingga diperoleh ***y* - *y_1* =** $\frac{y_2 ? y_1}{x_2 ? x_1}$ (x - x_1) atau $\frac{y ? y_1}{y_2 ? y_1} ? \frac{x ? x_1}{x_2 ? x_1}$.

Jadi $\frac{y ? y_1}{y_2 ? y_1} ? \frac{x ? x_1}{x_2 ? x_1}$ merupakan persamaan garis yang titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2).

<u>Contoh 4:</u>

Tentukan persamaan garis yang melalui titik (0, -3) dan (2, 5).

<u>Penyelesaian:</u>

Persamaan garis yang titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) adalah $\frac{y ? y_1}{y_2 ? y_1} ? \frac{x ? x_1}{x_2 ? x_1}$.

Jadi persamaan garis yang melalui titik (0, -3) dan (2, 5) adalah

$\frac{y ? (?3)}{5 ? (?3)} ? \frac{x ? 0}{2 ? 0}$ atau $\frac{y ? 3}{5 ? 3} ? \frac{x}{2}$ atau 2y + 6 = 8 x atau 2y = 8x -6.

3) Dua garis

a) *Titik potong dua garis*

Suatu garis seringkali disimbolkan dengan huruf kecil, misal *g, l,* atau yang lain. Misal diketahui dua garis g_1 dan g_2 yang persamaannya berturut-turut adalah $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ dan $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0.$ Jika dilihat dari kedudukannya, kedua garis tersebut dapat berpotongan atau tidak berpotongan. Sekarang kita akan menentukan koordinat titik potong kedua garis tersebut. Mencari titik potong dua garis berarti mencari pasangan terurut (x, y) yang memenuhi kedua persamaan tersebut. Pasangan terurut (x, y) dapat dicari dengan cara berikut:

$$\begin{array}{r|l|l} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 & \times B_2 & A_1 B_2 x + B_1 B_2 y + C_1 B_2 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 & \times B_1 & \underline{A_2 B_1 x + B_2 B_1 y + C_2 B_1 = 0} \quad - \end{array}$$

$$(A_1 B_2 - A_2 B_1)\, x + C_1 B_2 - C_2 B_1 = 0$$

$$(A_1 B_2 - A_2 B_1)\, x = C_2 B_1 - C_1 B_2$$

$$x = \frac{C_2 B_1 ? C_1 B_2}{A_1 B_2 ? A_2 B_1} \text{ dengan syarat } A_1 B_2 - A_2 B_1 ? 0.$$

Dengan cara yang sama diperoleh:

$$y = \frac{C_1 A_2 ? C_2 A_1}{A_1 B_2 ? A_2 B_1}$$

<u>Contoh 5:</u>

Tentukan titik potong garis g_1 dan g_2 yang persamaannya berturut-turut adalah $x + y + 1 = 0$ dan $2x + y - 1 = 0$.

Penyelesaian:

$$\begin{array}{l} 2x + y - 1 = 0 \\ \underline{\;x + y + 1 = 0\;} \quad - \\ x \qquad\quad - 2 = 0 \text{ atau } x = 2 \end{array}$$

Untuk $x = 2$, didapat $2 + y + 1 = 0$ atau $y = -3$.

Jadi titik potong kedua garis adalah titik P (2, -3).

Titik potong dua garis dapat pula ditentukan dengan menggambar grafik kedua garis pada bidang Cartesius yang sama. Cara ini disebut sebagai penyelesaian sistem persamaan linier dengan cara grafik.

Contoh 6:

Gambarlah grafik garis dengan persamaan $2x + 3y = 5$ dan $3x - y = 5$ pada bidang Cartesius yang sama. Tentukan penyelesaian dari kedua persamaan tersebut dengan cara grafik.

Penyelesaian:

Berikut tabel harga dari setiap persamaan.

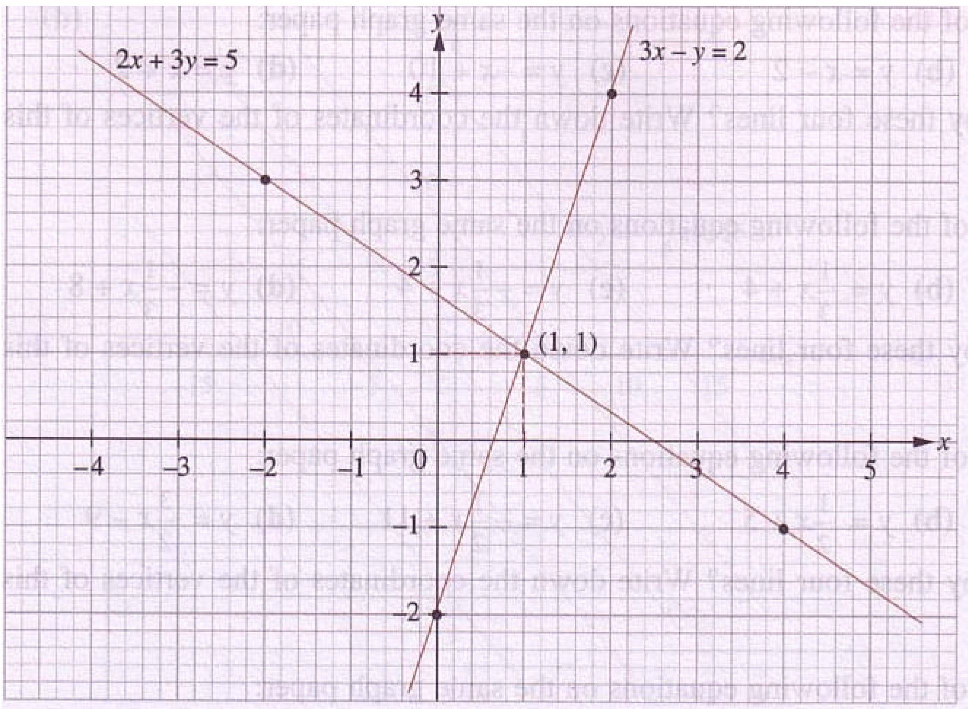
$2x + 3y = 5$

x	-2	1	4
y	3	1	-1

$3x - y = 5$

x	0	1	2
y	-2	1	4

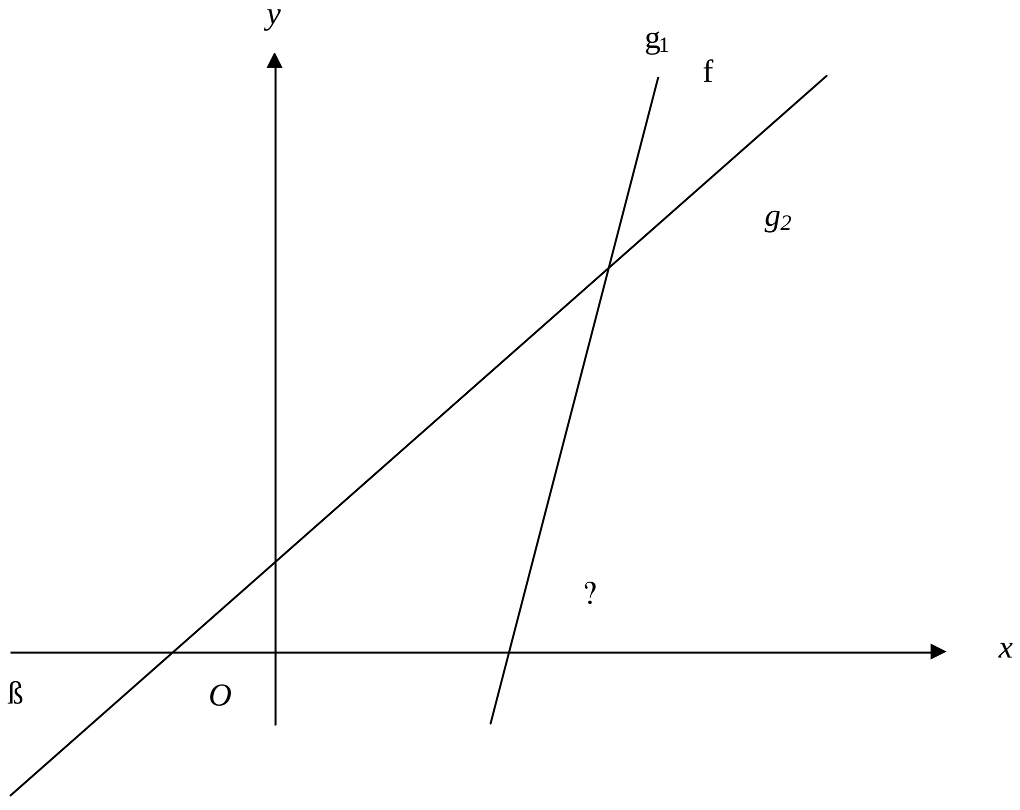
Gambar berikut menunjukkan grafik garis $2x + 3y = 5$ dan $3x - y = 5$.



Kedua grafik berpotongan di titik (1, 1). Jadi penyelesaian dari sistem persamaan $2x + 3y = 5$ dan $3x – y = 5$ adalah $x = 1$ dan $y = 1$.

b) Sudut antara dua garis

Misal dua garis $g_1 = y = m_1 x + n_1$ (dibaca g_1 mempunyai persamaan $y = m_1 x + n_1$ atau persamaan g_1 adalah $y = m_1 x + n_1$) dan $g_2 = y = m_2 x + n_2$ berpotongan dan membentuk sudut f . Garis g_1 membentuk sudut ? dengan sumbu x positif, berarti gradien atau koefisien arah $g_1 = m_1 =$ tan ? . Garis g_2 membentuk sudut ß dengan sumbu x positif, berarti gradien atau koefisien arah $g_2 = m_2 =$ tan ß. Sekarang kita akan menentukan besar sudut f . Keadaan ini digambarkan seperti gambar berikut.



Sudut antara kedua garis adalah f = ? - ß, dengan demikian

tan f = tan (? - ß)

$$= \frac{\tan ? \; ? \tan ?}{1 ? \tan ? \; \tan ?}$$

$$= \frac{m_1 \; ? \; m_2}{1 ? m_1 m_2}$$

Jika persamaan garis g_1 dan g_2 dinyatakan dalam bentuk umum, yaitu $g_1 = A_1x + B_1y + C_1$ dan $g2 = A_2x + B_2y + C_2$, Anda dapat menunjukkan bahwa tan f $= \frac{A_1B_2 \; ? \; A_2B_1}{A_1A_2 \; ? \; B_1B_2}$.

<u>Contoh 7:</u>

Tentukan sudut antara garis $g_1 = y = 2x + 3$ dengan garis $y = \; ? \frac{1}{2}x \; ? \; 5$.

<u>Penyelesaian:</u>

$m_1 = 2$ dan $m_2 = \; ? \frac{1}{2}$

tan f $= \dfrac{2 \; ? \frac{1}{2}}{1 \; ? \; 2(? \frac{1}{2})} = \dfrac{1\frac{1}{2}}{0}$ tidak didefinisikan, karena pembagian dengan nol.

Tangen suatu sudut tidak didefinisikan, berarti sudut tersebut besarnya $90^{0.}$

Jadi sudut antara $g_1 = 0$ dan $g_2 = 0$ adalah 90^0.

c) Dua garis saling tegak lurus

Cermati lagi contoh 4 di atas, sudut antara $g_1 = 0$ dan $g_2 = 0$ adalah 90^0. Dengan kata lain kedua garis berpotongan tegak lurus atau kedua garis saling tegak lurus. Sekarang marilah kita menentukan syarat agar dua garis saling tegak lurus.

Jika diketahui dua garis $g_1 = y = m_1 x + n_1$ dan $g_2 = y = m_2 x + n_2$ saling tegak lurus, maka sudut antara keduanya $90^{0.}$ Berdasarkan rumus tangen sudut antara dua garis didapat tan $90^0 = \frac{m_1 ? m_2}{1 ? m_1 m_2}$ pada hal tan 90^0 tidak didefinisikan. Hal ini terjadi jika $1 + m_1 m_2 = 0$. Dengan perkataan lain $m_1 m_2 = -1$atau **$m_1 m_2 = -1$** merupakan **syarat** agar **garis g_1 = $y = m_1 x + n_1$ dan g_2 = $y = m_2 x + n_2$ saling tegak lurus**.

Anda dapat menentukan **syarat** agar garis yang persamaannya **$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$** saling **tegak lurus** pada garis dengan persamaan **$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$** adalah **$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$**

Contoh 8:

Tentukan persamaan garis yang tegak lurus pada garis *l* dengan persamaan $y = 5x - 1$ dan melalui titik P(3, 0).

Penyelesaian:

$m_l = 5$ (dibaca gradien garis *l* sama dengan 5).

Misal *g* tegak lurus *l*, maka $m_l \times m_g = -1$, dengan perkataan lain $5\, m_g = -1$ atau $m_g = ? \frac{1}{5}$.

Jadi persamaan garis dengan gradien $? \frac{1}{5}$ dan melalui P(3, 0) adalah:

$$y - 0 = ? \frac{1}{5} (x - 3)$$

atau $5y = 3 - x$.

d) Dua garis sejajar

Anda telah mempelajari syarat dua garis saling tegak lurus, marilah sekarang kita mempelajari syarat dua garis sejajar. Untuk itu, cermatilah uraian berikut.

Jika diketahui dua garis $g_1 = y = m_1 x + n_1$ dan $g_2 = y = m_2 x + n_2$ saling sejajar, maka sudut antara keduanya 0^0. Berdasarkan rumus tangen sudut antara dua garis didapat tan $0^0 = \frac{m_1 ? m_2}{1 ? m_1 m_2}$ pada hal tan

$0^0 = 0$. Hal ini terjadi jika $m_1 - m_2 = 0$. Dengan perkataan lain $\boldsymbol{m_1 = m_2}$ merupakan **syarat** agar **garis** $\boldsymbol{g_1 = y = m_1 x + n_1}$ **dan** $\boldsymbol{g_2 = y = m_2 x + n_2}$ **saling sejajar**.

Cobalah Anda selidiki bahwa **syarat** agar garis dengan persamaan $\boldsymbol{A_1x + B_1y + C_1 = 0}$ **sejajar** dengan garis yang persamaannya $\boldsymbol{A_2x + B_2y + C_2 = 0}$ adalah $\boldsymbol{A_1B_2 - A_2B_1 = 0}$

Contoh 9:

Tentukan persamaan garis yang melalui titik potong garis g_1 dengan garis g_2 yang persamaannya berturut-turut $2x - y = 0$ dengan garis $x + 2y - 5 = 0$ dan sejajar dengan garis $2x - y + 3 = 0$.

Penyelesaian:

Terleb ih dahulu ditentukan titik potong garis $2x - y = 0$ dan $x + 2y - 5 = 0$

$$\begin{array}{l|c|rcl} 2x - y = 0 & \times 1 & 2x - y & = & 0 \\ x + 2y - 5 = 0 & \times 2 & 2x + 4y - 10 & = & 0 \\ \hline & & -5y - 10 & = & 0 \text{ atau } y = 2 \end{array}$$

Untuk $y = 2$, didapat $x + 2(2) - 5 = 0$ atau $x = 1$.

Jadi titik potong garis $2x - y = 0$ dengan garis $x + 2y - 5 = 0$ adalah titik T (1, 2).

Gradien garis $2x - y + 3 = 0$ adalah 2. Garis yang diminta sejajar dengan garis $2x - y + 3 = 0$, maka gradiennya = 2.

Jadi persamaan garis yang diminta adalah garis yang melalui T(1, 2) dan bergradien 2. Garis tersebut adalah $y - 2 = 2(x - 1)$ atau $y - 2 = 2x - 2$ atau $2x - y = 0$ yaitu garis g_1 sendiri.

e) Dua garis berimpit

Dari contoh 6, Anda mengetahui bahwa garis yang sejajar dengan garis $2x - y + 3 = 0$ dan melalui titik potong garis g_1 dengan garis g_2 yang persamaannya berturut-turut $2x - y = 0$ dengan garis $x + 2y - 5 = 0$ adalah garis g_1 sendiri. Dengan kata lain garis yang diminta berimpit dengan garis g_1. Jika hal ini Anda cermati, Anda dapat mengetahui bahwa dua garis berimpit, jika kedua garis mempunyai gradien sama dan bersekutu di satu titik.

<u>Contoh 10:</u>

Selidiki apakah garis $x + 2y + 3 = 0$ berimpit dengan garis $y = 2x$.

<u>Penyelesaian:</u>

g_1 = $x + 2y + 3 = 0$, gradien g_1 = ? $\frac{1}{2}$.

g_2 = $y = 2x$, gradien g_2 = 2.

Karena gradien g_1 ? gradien $g_{2,}$ maka g_1 tidak berimpit dengan $g_{2.}$

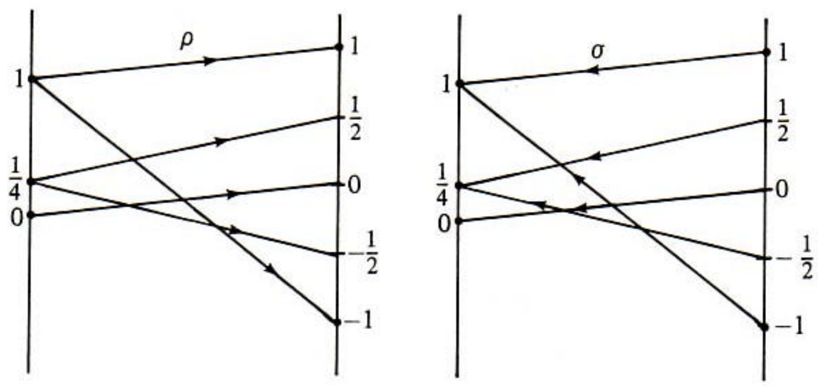
4) Invers fungsi linier

Sebelum Anda mempelajari invers fungsi linier, marilah kita memperhatikan relasi ?: x ? y dimana $y^2 = x$ dengan 0 = x = 1 dan -1 = y = 1. Anda dapat menentukan suatu relasi s: x ? y dimana -1 = x = 1 dan 0 = y = 1, sedemikian hingga y s x ? x ? y.

Karena y s x ? x ? y dan x ? y ? $x^2 = y$, Anda dapat memperoleh y s x ? $x^2 = y$ dengan -1 = x = 1 dan 0 = y = 1.

Jadi relasi s ditentukan oleh s: x ? y dengan $x^2 = y$, -1 = x = 1 dan 0 = y = 1.

Berikut ini adalah diagram panah dari ? dan s.



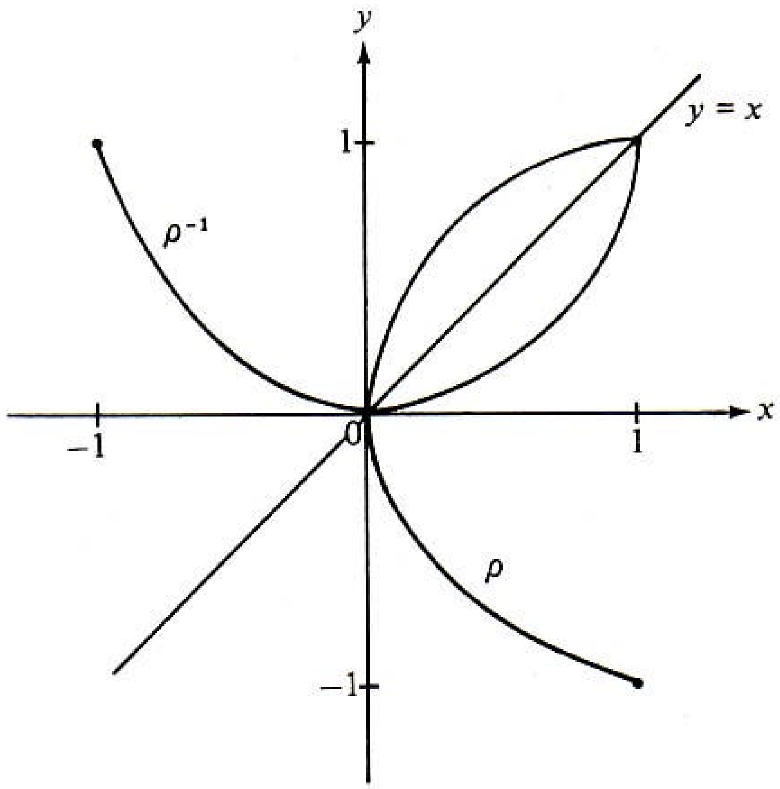
Relasi s di atas disebut invers dari ? dan dinyatakan sebagai $?^{-1.}$

Bila Anda menggambar grafik dari ? dan $?^{-1,}$ dengan

$y ? x ? \quad y^2 = x$

dan $\quad y ?^{-1} x ? \quad x^2 = y$

pada bidang Cartesius yang sama, Anda memperoleh diagram berikut:



Perhatikan bahwa grafik dari $?^{-1}$ merupakan refleksi dari garafik ? terhadap garis $y = x$. Kenyataan ini selalu benar untuk setiap relasi dengan inversnya.

Secara umum, setiap relasi ?: X ? Y mempunyai **relasi invers** yaitu:

$?^{-1}$:*Y* ? *X* yang didefinisikan sebagai

x* $?^{-1}$ *y* ? *y* ? *x dengan ***x*** ? ***X*** dan ***y*** ? ***Y.***

<u>Contoh 11:</u>

Diketahui: $X = \{ 1, 3 \}$ dan $Y = \{ 0, 2, 5 \}$.

?: X ? Y yang didefinisikan sebagai berikut

untuk setiap (x, y) ? $X \times Y$, $y ? x ? \quad y > x$.

Tentukan:

a) diagram panah dari ?,

b) diagram panah dari ?$^{-1}$.

Penyelesaian:

a) Dari definisi ? jelaslah bahwa 0 ? 1 atau 0 ? 1

2 > 1 atau 2 ? 1

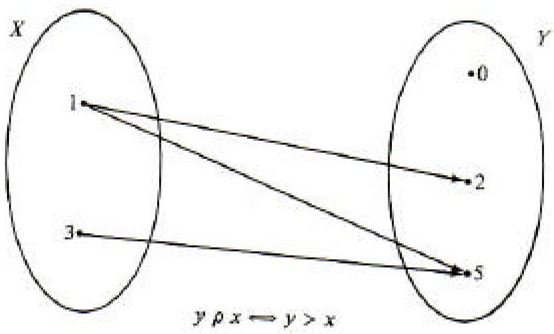
5 > 1 atau 5 ? 1

0 ? 3 atau 0 ? 3

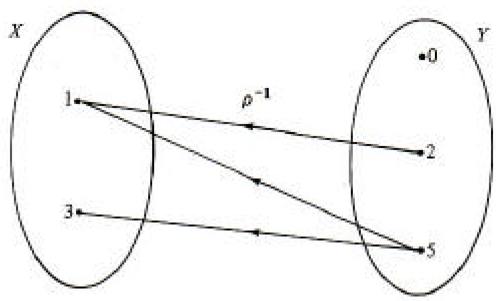
2 ? 3 atau 2 ? 3

5 > 3 atau 5 ? 3

Dengan demikian diagram panah dari y ? x ? $y > x$ adalah:



b) Dengan membalik arah anak panah, Anda memperoleh diagram panah dari ?$^{-1,}$ yaitu:



Di atas sudah dijelaskan bahwa, setiap relasi ?: X ? Y mempunyai **relasi invers** yaitu **?$^{-1:}$ *Y* ? *X*** yang didefinisikan sebagai:

x* ?$^{-1}$ *y* *y* ? *x dengan ***x*** ? ***X*** dan ***y*** ? ***Y.***

Tentunya Anda masih ingat bahwa suatu fungsi adalah relasi, dan setiap relasi mempunyai invers. Karena itu, setiap fungsi *f: X* **?** ***Y*,** tentu ada relasi invers $f^{-1:}$ *Y* **?** ***X*** sedemikian hingga *y f x* ? *x* f^{-1} *y.* Apakah relasi invers $f^{-1:}$ *Y* **?** ***X*** selalu merupakan fungsi dari *Y* ke *X*? Untuk itu perhatikan contoh 12 berikut.

Contoh 12:

Diketahui: *A* = { -1, 0, 1, 2 }, *B* = { 0, 1, 4, 7 }, *C* = { 0, 1, 2 }, dan *D* = { 0, 1, 4 }.

Fungsi *f*: *A* **?** *B, g*: *C* **?** *B,* dan *h: A* **?** *D* yang didefinisikan sebagai berikut:

f: *x* **?** $\boldsymbol{x^2}$

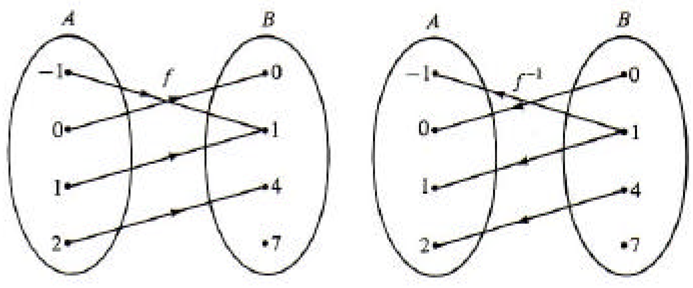
g: *x* **?** $\boldsymbol{x^2}$

h: *x* **?** $\boldsymbol{x^2}$

Apakah fungsi-fungsi ini satu-satu pada? Apakah relasi invers dari *f, g,* dan *h* merupakan fungsi?

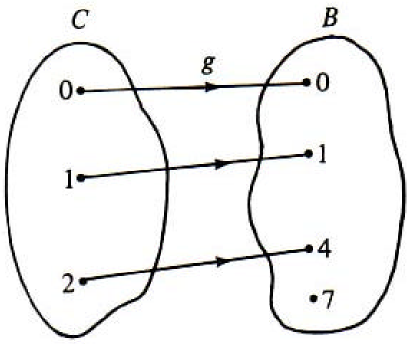
Penyelesaian:

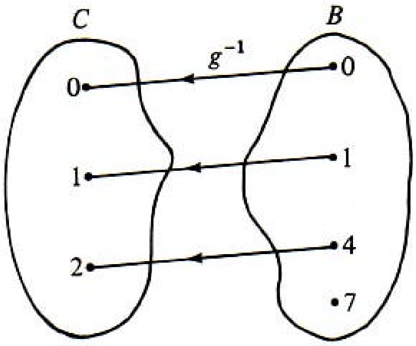
Diagram panah dari *f* dan f^{-1} adalah:



Dari diagram panah di atas, Anda dapat mengetahui bahwa *f*: *A* **?** *B* bukan fungsi satu-satu dan bukan fungsi pada. Dari diagram di atas, Anda juga dapat mengetahui bahwa $f^{-1:}$ *B* **?** *A* bukan fungsi, karena f^{-1} tidak terdefinisi untuk 7. Lebih dari itu, -1 dan 1 keduanya merupakan bayangan dari 1 oleh f^{-1}.

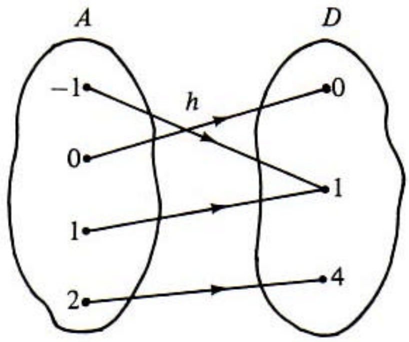
Diagram panah berikut menunjukkan diagram panah dari *g* dan g^{-1}.

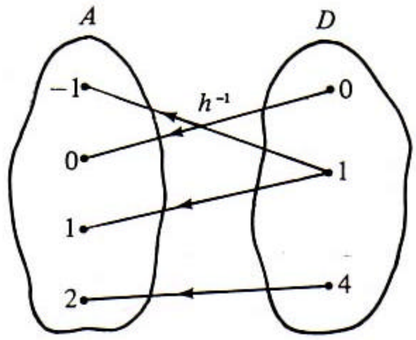




Fungsi g: C ? B jelas fungsi satu-satu, tetapi bukan fungsi pada. Relasi g^{-1}: B ? C bukan fungsi, karena 7 ? B tidak punya pasangan di C oleh g^{-1}.

Diagram panah berikut menunjukkan digagram panah untuk h dan h^{-1}





Dari diagram panah di atas, Anda dapat melihat bahwa h: A ? D adalah fungsi pada, tetapi tidak satu-satu. Sekali lagi h^{-1}: D ? A bukan fungsi, karena -1 dan 1 keduanya merupakan bayangan dari 1 pada relasi h^{-1}.

Contoh 12 ini mengatakan bahwa jika f: X ? Y suatu fungsi, maka relasi invers f^{-1}: Y ? X tidak selalu fungsi. Kapankah f^{-1}: Y ? X merupakan suatu fungsi?

<u>Contoh 13:</u>

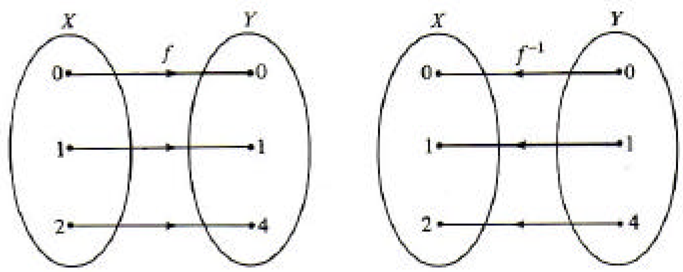
Diketahui: X = { 0, 1, 2 } dan Y = { 0, 1, 4 }

f: X **?** *Y* didefinisikan sebagai *f*: *x* **?** $\boldsymbol{x^2}$.

Apakah fungsi *f* ini satu-satu pada? Apakah relasi invers dari *f* merupakan fungsi?

<u>Penyelesaian:</u>

Diagram panah berikut berikut menunjukkan *f* dan $f^{-1.}$



Dari diagram panah di atas, Anda dapat mengetahui bahwa *f* adalah fungsi satu-satu pada. Relasi invers $f^{-1:}$ *Y* **?** *X* merupakan suatu fungsi, karena f^{-1} menghubungkan semua anggota *Y* dengan tunggal ke anggota *X*.

Dari contoh 12 dan 13, Anda dapat membuat simpulan berikut:

Misal *f: X* **?** *Y* suatu fungsi. Invers *f* yaitu $f^{-1:}$ *Y* **?** *X* merupakan fungsi jika dan hanya jika *f* suatu fungsi satu-satu pada. Pada kejadian ini fungsi f^{-1} disebut **fungsi invers** dari *f*.

<u>Contoh 14:</u>

Misal *f: R* **?** ***R*** suatu fungsi yang didefinisikan sebagai *f*: *x* **?** **2*x* –** 2.

Tentukan invers dari *f*, yaitu $f^{-1.}$ Apakah *f* fungsi satu-satu pada? Apakah f^{-1} suatu fungsi?

<u>Penyelesaian:</u>

Dengan definisi, Anda mempunyai $f^{-1:}$ *R* **?** *R* dan

$x = f^{-1}(y)$? $y = f(x)$

? $y = 2x - 2$

? $\quad x = \frac{1}{2} y + 1$

Karena itu, $x = f^{-1}(y) = \frac{1}{2} y + 1$.

Jadi relasi invers $f^{-1:} R$ **?** R ditentukan oleh

$$f^{-1:} y \textbf{ ? } \frac{1}{2} y + 1$$

Akan ditunjukkan bahwa *f* adalah fungsi satu-satu.

Misal x_1, x_2 anggota R sedemikian hingga $f(x_1) = f(x_2)$, maka $2x_1 – 2 = 2 x_2 - 2$. Karena itu, $2x_1 = 2 x_2$ atau $x_1 = x_2$. Hal ini menunjukkan bahwa *f* adalah fungsi satu-satu.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa *f* pada.

Untuk y ? R bentuk $x = \frac{1}{2} y + 1$ di R. Perhatikan bahwa

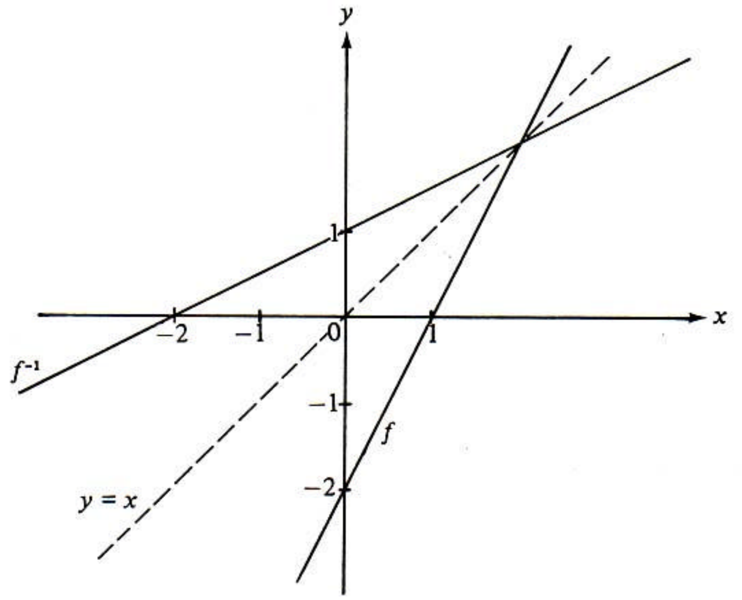
$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\frac{1}{2} y + 1\right) \\ &= 2\left(\frac{1}{2} y + 1\right) – 2 \\ &= y + 2 – 2 \\ &= y \end{aligned}$$

Berdasarkan definisi *f* pada.

Karena *f* satu-satu pada, maka dapat disimpulkan bahwa $f^{-1:} R$ **?** R merupakan suatu fungsi.

Catatan: Fungsi invers $f^{-1:} R$ **?** R yang dihasilkan dari contoh 14 di atas, ditentukan oleh $f^{-1:} y$ **?** $\frac{1}{2} y + 1$ dengan y ? R. Anda dapat menulis bentuk yang ekuvalen dengan bentuk tersebut, yaitu $f^{-1:} x$ **?** $\frac{1}{2} x + 1$ dengan x ? R.

Grafik dari $y = 2x - 2$ dan $y = \frac{1}{2} x + 1$, seperti ditunjukkan pada gambar berikut, simetri terhadap garis $y = x$.



c. Rangkuman 2

Grafik suatu fungsi adalah himpunan semua titik yang koordinatnya memenuhi persamaan fungsi.

Pada garis dengan persamaan $y = mx + n$, $\boldsymbol{m}$ merupakan **gradien**, atau kemiringan garis dan titik dengan koordinat **(0, *n*)** merupakan **titik potong garis dengan sumbu-*y***.

Gradien sebuah garis adalah **tangen sudut yang dibentuk oleh garis dengan sumbu *x* positif.**

Bentuk umum persamaan garis, yaitu $\boldsymbol{Ax + By + C = 0}$.

Persamaan **garis** yang **bergradien *m*** dan **melalui titik** (x_1, y_1) adalah $\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}$.

Persamaan **garis** yang **melalui titik** (x_1, y_1) **dan** (x_2, y_2) adalah

$$\frac{y ? y_1}{y_2 ? y_1} ? \frac{x ? x_1}{x_2 ? x_1}.$$

Titik potong dua garis adalah **titik yang koordinatnya memenuhi persamaan garis.**

Jika f sudut antara dua garis $g_1\, y = m_1 x + n_1$) dan $g_2 = y = m_2 x + n_2$, maka

$$\tan f = \frac{m_1 ? m_2}{1 ? m_1 m_2}$$

Syarat agar **garis** $\boldsymbol{g_1 = y = m_1 x + n_1}$ **dan** $\boldsymbol{g_2 = y = m_2 x + n_2}$ **saling tegak lurus** adalah $\boldsymbol{m_1 m_2 = -1}$.

Syarat agar **garis** $\boldsymbol{g_1 = y = m_1 x + n_1}$ **dan** $\boldsymbol{g_2 = y = m_2 x + n_2}$ **saling sejajar** adalah $\boldsymbol{m_1 = m_2}$.

Dua garis berimpit, jika dua garis tersebut sejajar dan mempunyai satu titik sekutu.

Setiap relasi ?: X ? Y mempunyai **relasi invers** yaitu $\boldsymbol{?^{-1}: Y ? X}$ yang didefinisikan sebagai $\boldsymbol{x\, ?^{-1}\, y}$ **?** $\boldsymbol{y ? x}$ dengan $\boldsymbol{x}$? $\boldsymbol{X}$ dan $\boldsymbol{y}$? $\boldsymbol{Y}$**.**

d. Tugas 2

Kerjakan soal-soal berikut dengan cermat.

1) Tentukan persamaan garis yang
   a) melalui titik (-2, 0) dan (0, 3),
   b) melalui titik (1, 0) dan sejajar dengan garis $y = 2x$,
   c) melalui titik (2, 0) dan bersudut 45^0 dengan garis $y = 2x$,
   d) melalui titik (0, -1) tegak lurus pada garis $y = 2x$.
2) Tentukan titik potong garis $2x + 3y - 6 = 0$ dengan garis $x + y - 2 = 0$ dengan mencari harga x dan y yang memenuhi kedua persamaan tersebut. Setelah itu cek hasil perhitungan Anda dengan menggambar grafik kedua garis.
3) Tentukan invers dari $y = -4x + 3$. Setelah itu, gambarlah garis yang persamaannya $y = -4x + 3$ dan garis dengan persamaan invers dari $y = -4x + 3$. Apakah kedua garis berpotongan? Jika kedua garis berpotongan, tentukan koordinat titik potongnya.

e. Tes Formatif 2

Kerjakan soal-soal berikut dengan cermat.

1) Tentukan penyelesaian sistem persamaan $2x - 5y = 32$

   $2x + 3y = 0$

   secara grafik.

2) Tentukan persamaan garis yang
   a) melalui titik (1, 2) dan -3, 4)
   b) melalui titik (2, 1) dan sejajar garis $x + 2y + 3 = 0$
   c) melalui titik O dan tegak lurus garis $x + y - 3 = 0$

3) Selidiki apakah segitiga yang titik-titik sudutnya $A(-5, 1)$, $B(3, -5)$, dan $C(2, 2)$ merupakan segitiga siku-siku. Jelaskan jawaban Anda.

4) Tentukan invers dari $y = 3x - 5$.

f. Kunci Jawaban Tes Formatif 2

1) Tabel nilai untuk setiap persamaan adalah:

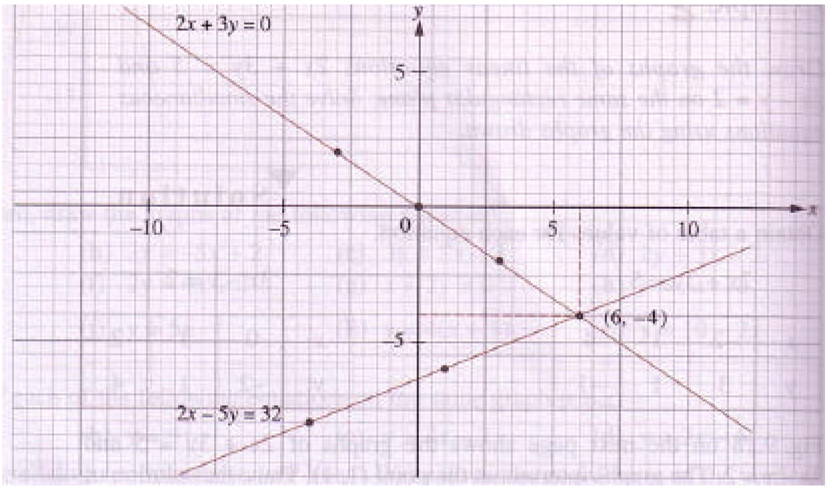
   $2x - 5y = 32$

x	-4	1	6
y	-8	-6	-4

   $2x + 3y = 0$

x	-3	0	3
y	2	0	-2

   Grafik dari kedua persamaan adalah:



Grafik tersebut menunjukkan bahwa titk potong kedua garis adalah titik (6, -4). Jadi penyelesaian dari sistem persamaan tersebut adalah $x = 6$ dan $y = -4$.

2 a) $x + 2y = 5$

b) $x + 2y = 4$

c) $x - y = 0$

3) Ya, karena *AC* ? *BC*.

4) Jika $f(x) = 3x - 5$, maka $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + 5$.

3. Kegiatan Belajar 3

a. Tujuan Kegiatan Belajar 3

Setelah mempelajari kegiatan belajar 3, diharapkan Anda dapat:

- menggambar grafik fungsi kuadrat,
- menentukan titik potong grafik fungsi kuadrat dengan sumbu koordinat, sumbu simetri dan nilai ekstrimnya,
- menentukan persamaan kuadrat, jika diketahui grafik atau unsur-unsurnya.

b. Uraian Materi 3

1) Bentuk umum fungsi kuadrat

Pada kegiatan belajar 2, Anda telah mempelajari bahwa bentuk umum persamaan garis, yaitu $Ax + By + C = 0$. Persamaan ini merupakan persamaan linier dengan variabel x dan y dengan syarat A dan B tidak bersama-sama sama dengan 0 (nol) dengan $A, B,$ dan C bilangan riel. Persamaan garis ini dapat pula dinyatakan sebagai $y = mx + n$, dimana Anda telah memahami bahwa persamaan $mx + n = 0$ adalah persamaan linier dengan satu variabel, yaitu x. Penyelesaian persamaan ini adalah $x = ?\frac{n}{m}$ dengan syarat m ? 0. Bila Bila $y = f(x)$, Anda dapat menyatakan $y = mx + n$ sebagai $f(x) = mx + n$ yang disebut sebagai fungsi linier.

Sekarang Anda akan mempelajari bentuk lain dari suatu fungsi yang dikenal sebagai fungsi kuadrat. Fungsi f: R ? R yang didefinisikan sebagai f: x ? $ax^2 + bx + c$ dengan $a, b,$ dan c anggota R dan a ? 0 disebut fungsi berderajad dua atau fungsi kuadrat. Persamaan fungsi kuadrat

f: x ? $ax^2 + bx + c$ adalah $y = ax^2 + bx + c$ dan grafiknya disebut parabola.

Sebelum Anda mempelajari bagaimana menggambar grafik suatu parabola, ada baiknya Anda mengingat kembali cara menentukan penyelesaian dari suatu persamaan kuadrat yang berbentuk $ax^2 + bx + c = 0$ dengan a ? 0. Dengan penyelesaian bentuk kuadrat, Anda memperoleh

$$ax^2 + bx + c = a\ ??x ? \frac{b}{2a} ?^2 ? \frac{b^2 ? 4ac}{4a^2} ?$$

Karena $ax^2 + bx + c = 0$, maka Anda memperoleh

$$a\ ??x ? \frac{b}{2a} ?^2 ? \frac{b^2 ? 4ac}{4a^2} ? = 0$$

Jika ? dan ß merupakan **penyelesaian** dari **persamaan $ax^2 + bx + c = 0$**, maka didapat

$$? = \frac{? b ? \sqrt{b^2 ? 4ac}}{2a} \text{ dan}$$

$$ß = \frac{? b ? \sqrt{b^2 ? 4ac}}{2a}$$

Penyelesaian dari suatu persamaan kuadrat seringkali juga disebut akar dari persamaan kuadrat.

<u>Contoh 1:</u>

Tentukan penyelesaian dari

a) $x^2 + 3x + 2 = 0$,

b) $x^2 + 4x + 4 = 0$,

c) $x^2 + 3x + 3 = 0$,

<u>Penyelesaian:</u>

a) Karena $a = 1$, $b = 3$, $c = 2$, dan $b^2 – 4ac = 1$ maka penyelesaian dari persamaan $x^2 + 3x + 2 = 0$ adalah $? ? \frac{? 3 ? \sqrt{1}}{2} ? ?1$ dan $? ? \frac{? 3 ? \sqrt{1}}{2} ? ?2$.

b) Karena $a = 1$, $b = 4$, $c = 4$ dan $b^2 - 4ac = 0$, maka penyelesaian dari persamaan $x^2 + 4x + 4 = 0$ adalah $\alpha = \beta = \frac{-4}{2} = -2$.

c) Karena $a = 1$, $b = 3$, $c = 3$, dan $b^2 - 4ac = -3$ maka penyelesaian dari persamaan $x^2 + 3x + 3 = 0$ adalah $\alpha = \frac{-3 + \sqrt{-3}}{2}$ dan $\beta = \frac{-3 - \sqrt{-3}}{2}$.

Dari contoh 1, Anda dapat mengetahui bahwa penyelesaian dari persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ bergantung pada harga $\boldsymbol{b^2 - 4ac}$ yang disebut **diskriminan**, biasanya dinyatakan dengan ***D,*** persamaan. Berdasarkan diskriminan ini, Anda dapat membedakan penyelesaian persamaan kuadrat dengan cara berikut.

a) Jika $b^2 - 4ac > 0$, maka penyelesaian α dan ß berbeda dan riel.

b) Jika $b^2 - 4ac = 0$, maka penyelesaian α dan ß sama dan riel.

c) Jika $b^2 - 4ac < 0$, maka penyelesaian α dan ß memuat akar dari suatu bilangan negatif dan Anda mengatakan bahwa persamaan kuadrat tidak mempunyai penyelesaian riel.

Jadi dapat Anda simpulkan bahwa persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ mempunyai penyelesaian riel jika dan hanya jika $b^2 - 4ac \geq 0$.

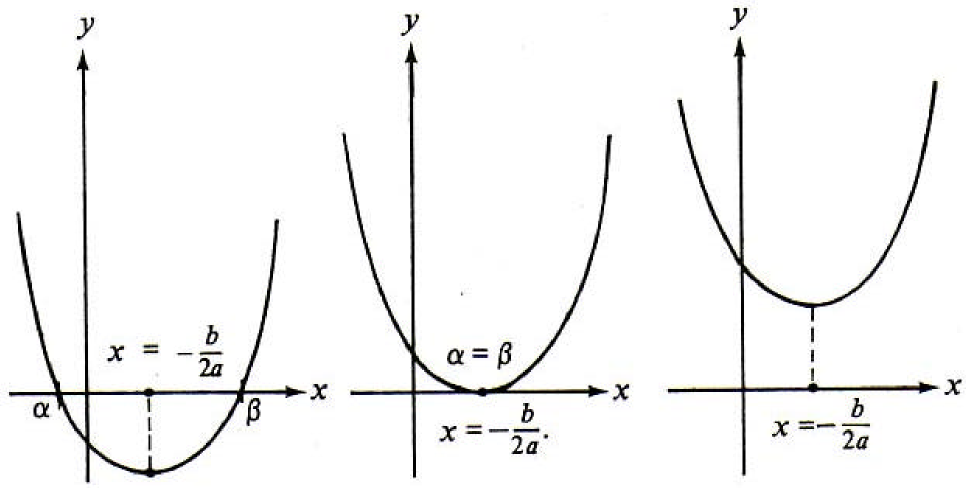
2) Grafik fungsi kuadrat

Di bagian 1) dikatakan bahwa grafik fungsi kuadrat yang persamaannya $y = ax^2 + bx + c$ adalah parabola. Untuk itu terlebih dahulu kita akan membahas tentang range dari $ax^2 + bx + c$. Anda sudah tahu bahwa $ax^2 + bx + c$ $= a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right\}$ dengan $a \neq 0$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Dari bentuk tersebut, Anda dapat mengetahui bahwa $\frac{4ac \,?\, b^2}{4a}$ adalah suatu konstanta dan $\left(x \,?\, \frac{b^2}{2a}\right)^2$ tidak negatif untuk semua bilangan riel x. Jadi pada hakekatnya nilai dari $ax^2 + bx + c$ bergantung pada nilai a. Berikut ini disajikan 2 kejadian, yaitu:

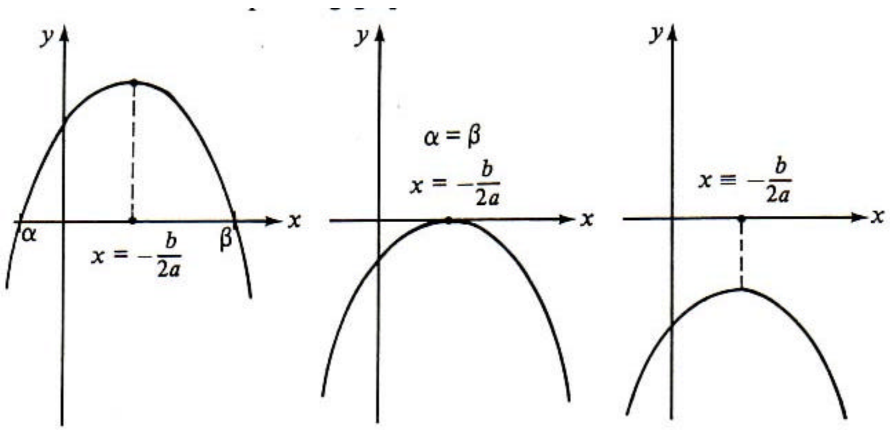
Kejadian 1: Jika $a > 0$, $ax^2 + bx + c$ mempunyai nilai terkecil $\frac{4ac \,?\, b^2}{4a}$ untuk $x = \,?\, \frac{b}{2a}$.



$a > 0$	$a > 0$	$a > 0$
dan	dan	dan
$b^2 - 4ac > 0$	$b^2 - 4ac = 0$	$b^2 - 4ac < 0$

Penyelesaian dari persamaan $ax^2 + bx + c = 0$ merupakan absis titik potong grafik $y = ax^2 + bx + c$ dengan sumbu-x. Penyelesaian tersbut dapat dilihat dengan jelas dari gambar di atas. Perhatikan letak dari titik minimum.

Kejadian 2: Jika $a < 0$, $ax^2 + bx + c$ mempunyai nilai terbesar $\frac{4ac \,?\, b^2}{4a}$ untuk $x = \,?\, \frac{b}{2a}$. Grafik yang sesuai dengan kejadian ini ditunjukkan oleh diagram berikut.



$a < 0$	$a < 0$	$a < 0$
dan	dan	dan
$b^2 - 4ac > 0$	$b^2 - 4ac = 0$	$b^2 - 4ac < 0$

Contoh 2:

Tentukan

a) nilai terbesar dari $3 + 4x - 2x^2$.

b) nilai terkecil dari $3x^2 - 4x + 2$.

Penyelesaian:

a) $3 + 4x - 2x^2 = 3 - 2(x^2 - 2x)$

$= 3 - 2(x^2 - 2x + 1) - 2$

$= 5 - 2(x - 1)^2$.

Karena $(x - 1)^2$ tidak negatif, maka $5 - 2(x - 1)^2$ mempunyai nilai terbesar jika $x = 1$.

Jadi nilai terbesar dari $3 + 4x - 2x^2$ adalah 5.

b) $3x^2 - 4x + 2 = 3\left(x^2 - \frac{4}{3}x\right) + 2$

$= 3\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) + 2 - 3\left(\frac{4}{9}\right)$

$= 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}$.

Karena $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2$ tidak negatif, Anda dapat melihat bahwa $3x^2 - 4x + 2$ mempunyai nilai terkecil $\frac{2}{3}$ jika $x = \frac{2}{3}$.

Contoh 3:

Gambarlah grafik dari $y = x^2 + 1$ untuk $-4 = x = 4$. Dari grafik tersebut tentukan:

a) nilai dari y jika $x = 2{,}5$,

b) nilai dari x jika $y = 15$,

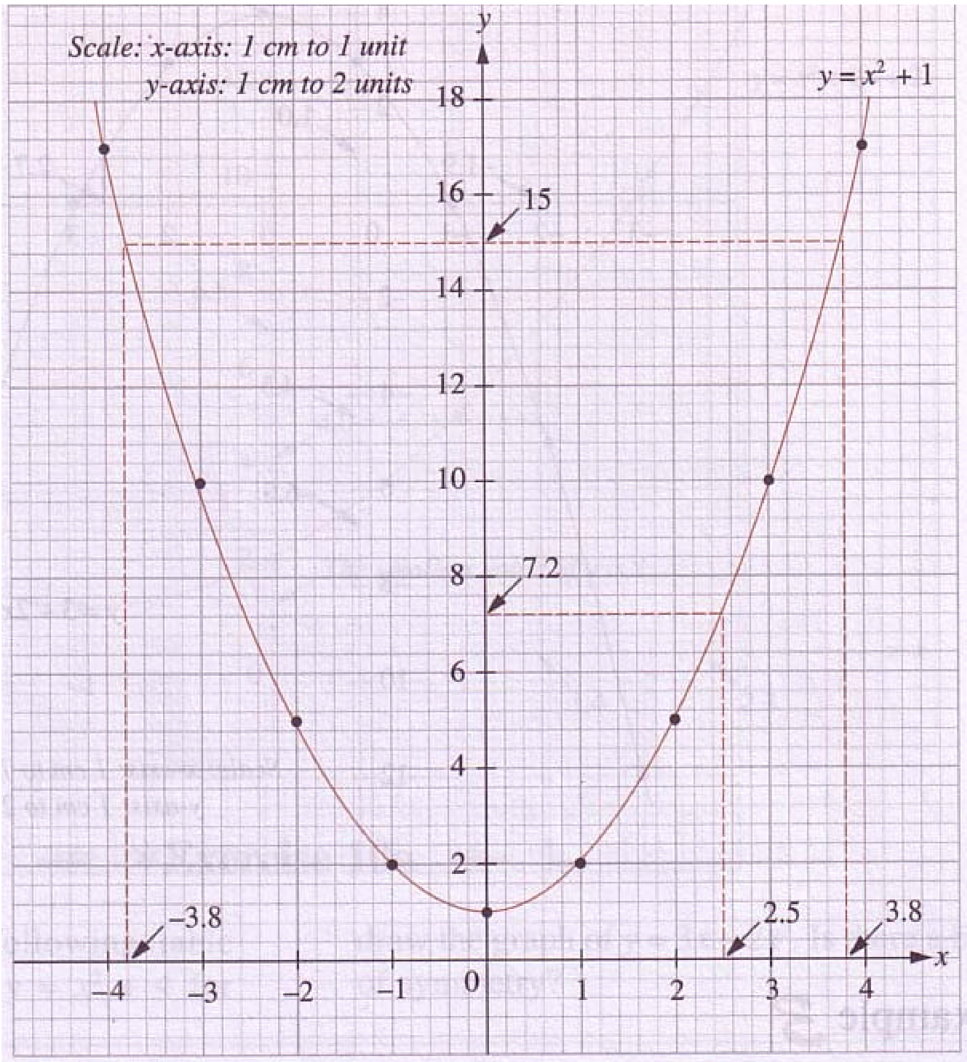
c) persamaan garis yang merupakan sumbu simetri dari grafik $y = x^2 + 1$.

Penyelesaian:

Daftar harga untuk x dan y adalah:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x^2	16	9	4	1	0	1	4	9	16
$y = x^2 + 1$	17	10	5	2	1	2	5	10	17

Grafik yang diperoleh berupa parabola yang gambarnya seperti gambar berikut.



Skala yang digunakan pada gambar tersebut adalah:

1 cm pada sumbu *x* menyatakan 1 satuan

1 cm pada sumbu *y* menyatakan 2 satuan.

Dari gambar diperoleh:

a) jika x = 2,5, maka y kira-kira sama dengan 7,2,

b) jika y = 15, maka x kira-kira sama dengan 3,8 atau – 3,8,

c) sumbu-*y* merupakan sumbu simetri garfik $y = x^2 + 1$. Sumbu simetri tersebut mempunyai persamaan $x = 0$.

Contoh 4:

Gambarlah grafik dari $y = 3 + 2x - x^2$ untuk $-3 = x = 5$. Dari grafik tersebut tentukan:

a) nilai terbesar dari *y*,

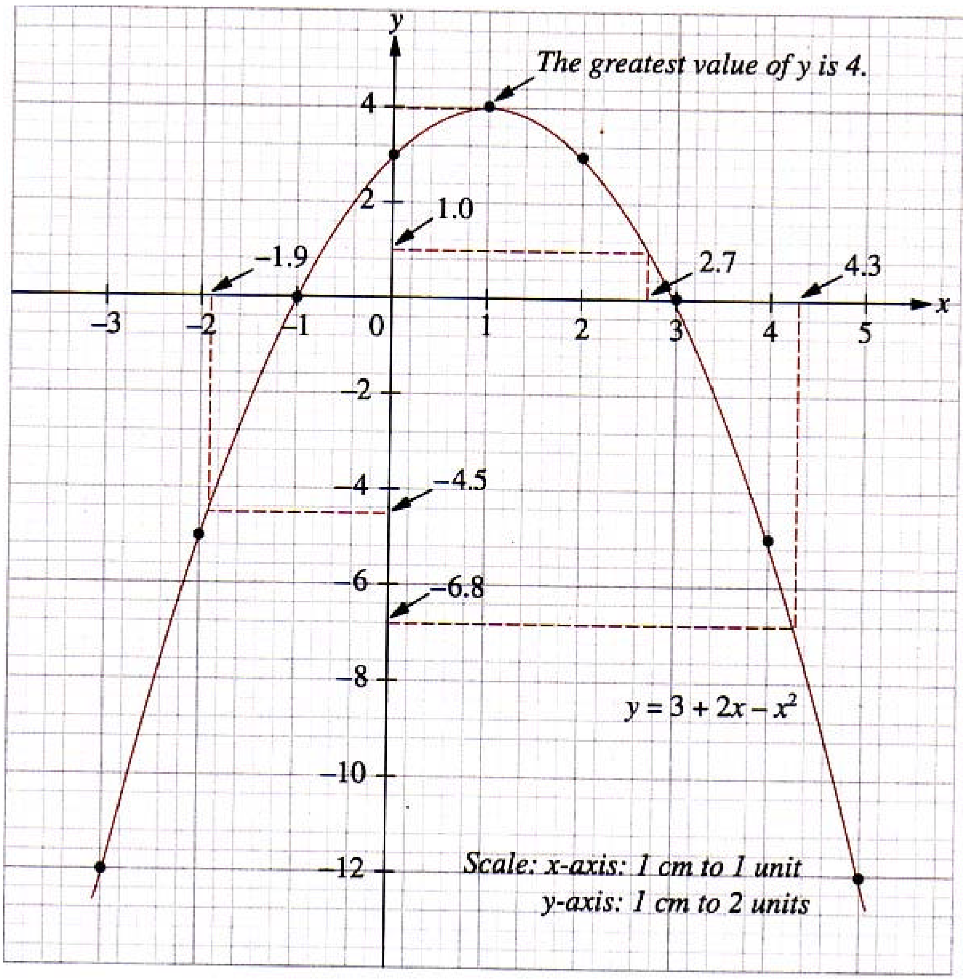
b) nilai dari *y* jika *x* = 1, 9; 2, 7; dan 4, 3.

Penyelesaian:

Tabel berikut menunjukkan nilai *y* untuk $-3 = x = 5$.

x	- 3	- 2	- 1	0	1	2	3	4	5
y	- 12	- 5	0	3	4	3	0	- 5	- 12

Grafik yang diperoleh seperti gambar berikut.



Skala yang digunakan pada gambar tersebut adalah:

1 cm pada sumbu x menyatakan 1 satuan

1 cm pada sumbu y menyatakan 2 satuan.

Dari gambar diperoleh:

a) nilai terbesar dari $y$adalah 4,

b) jika x = - 1,9, maka y kira-kira sama dengan – 4,5,

jika x = 2,7, maka y kira-kira sama dengan 1,

jika x = 4,3, maka y kira-kira sama dengan – 6,8.

Dari contoh 3, Anda dapat mengetahui bahwa grafik $y = x^2 + 1$ untuk $– 4 = x = 0$ menurun, sedangkan untuk $0 = x = 4$ menaik. Titik terendah pada grafik $y = x^2 + 1$ adalah titik (0, 1). Titik (0, 1) disebut **titik ekstrim**, dalam hal ini **titik minimum** karena tidak ada lagi titik pada parabola yang ordinatnya kurang dari 1. 1 merupakan nilai minimum dari fungsi dengan persamaan $y = x^2 + 1$. Garis dengan persamaan $x = 0$ merupakan sumbu simetri parabola.

Dari Contoh 4, Anda dapat mengetahui bahwa grafik $y = 3 + 2x – x^2$ untuk $– 3 = x = 1$ menaik sedangkan untuk $1 = x = 5$ menurun. Titik tertinggi pada grafik $y = 3 + 2x – x^2$ adalah titik (1, 4). Titik (1, 4) disebut **titik ekstrim**, dalam hal ini **titik maksimum** karena tidak ada lagi titik pada parabola yang ordinatnya lebih dari 4. 4 merupakan nilai maksimum dari fungsi dengan persamaan $y = 3 + 2x – x^{2.}$ Garis dengan persamaan $x = 1$ merupakan sumbu simetri parabola.

Berikut ini, secara umum, akan dibicarakan cara untuk menentukan nilai minimum atau nilai maksimum, yang disebut juga nilai ektrim, dari suatu fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ dengan a ? 0.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a} \text{ dengan } D = b^2 - 4ac$$

Jika a > 0, maka $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, **nilai minimum** $f(x) = -\frac{D}{4a}$ untuk

$x = -\frac{b}{2a}$

Jika a < 0, maka $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0$, **nilai maksimum** $f(x) = -\frac{D}{4a}$ untuk

$x = -\frac{b}{2a}$.

Nilai minimum atau nilai maksimum seringkali disebut sebagai **nilai ektrim**.

Titik P($-\frac{b}{2a}$, $-\frac{D}{4a}$) merupakan **titik puncak** parabola.

Garis yang melalui titik puncak dan sejajar dengan sumbu *y* disebut sumbu simetri parabola. Persamaan **sumbu simetri** adalah $x = -\frac{b}{2a}$.

3) *Penentuan persamaan kuadrat*

Pada bagian ini, Anda akan mempelajari sifat-sifat penyelesaian persamaan kuadrat. Jika α dan β menyatakan penyelesaian dari persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dengan pemfaktoran didapat persamaan yang ekivalen, yaitu:

$(x - \alpha)(x - \beta) = 0$

atau $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$ ....(1)

Padahal $ax^2 + bx + c = 0$

atau $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ ....(2)

Dari (1) dan (2) didapat $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$. Dengan demikian $(\alpha + \beta) = -\frac{b}{a}$ dan $\alpha\beta = \frac{c}{a}$.

Dari hasil di atas dapat disimpulkan hal-hal berikut.

a) Setiap persamaan kuadrat dapat disajikan dalam bentuk

x^2 – (? + ß) x + ? ß = 0 dengan ? dan ß penyelesaian dari persamaan tersebut.

b) Jika ? dan ß penyelesaian dari persamaan $ax^2 + bx + c = 0$, maka

$$(? + ß) = -\frac{b}{a} \text{ dan } ?\,ß = \frac{c}{a}$$

Contoh 5:

Jika ? dan ß penyelesaian dari persamaan $2x^2 - x + 4 = 0$, tentukan nilai dari:

a) $?^2 + ß^2$

b) $?^3 + ß^3$

c) $\frac{?}{?} ? \frac{?}{?}$

Penyelesaian:

a) $?^2 + ß^2 = (? + ß)^2 - 2?ß$

$$= \frac{1}{4} ? 4 = ? \frac{15}{4}.$$

b) $?^3 + ß^3 = (? + ß)\ (?^2 - ?ß + ß^2)$

$$= (? + ß)\ \{ (?^2 + ß^2) - ?ß \}$$

$$= \frac{1}{2} ?? \frac{15}{4} ? 2? = ? \frac{23}{8}.$$

c) $\frac{?}{?} ? \frac{?}{?} = \frac{? \quad ??^2}{??}$

$$= ?? \frac{15}{4} ?? \frac{1}{2} = ? \frac{15}{8}.$$

c. Rangkuman 3

Persamaan fungsi kuadrat

f: x ? $ax^2 + bx + c$ adalah $y = ax^2 + bx + c$ dan grafiknya disebut parabola

Jika ? dan **ß** merupakan **penyelesaian** dari **persamaan** $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$, maka didapat

$? = \frac{? \, b \, ? \sqrt{b^2 \; ? \; 4ac}}{2a}$ dan

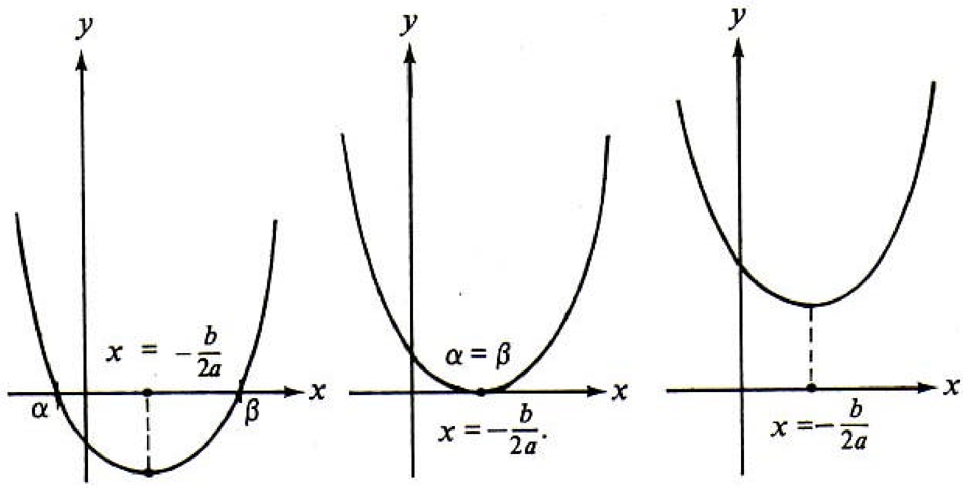
$ß = \frac{? \, b \, ? \sqrt{b^2 \; ? \; 4ac}}{2a}$

harga ***b^2 – 4ac*** yang disebut **diskriminan**, biasanya dinyatakan dengan ***D***

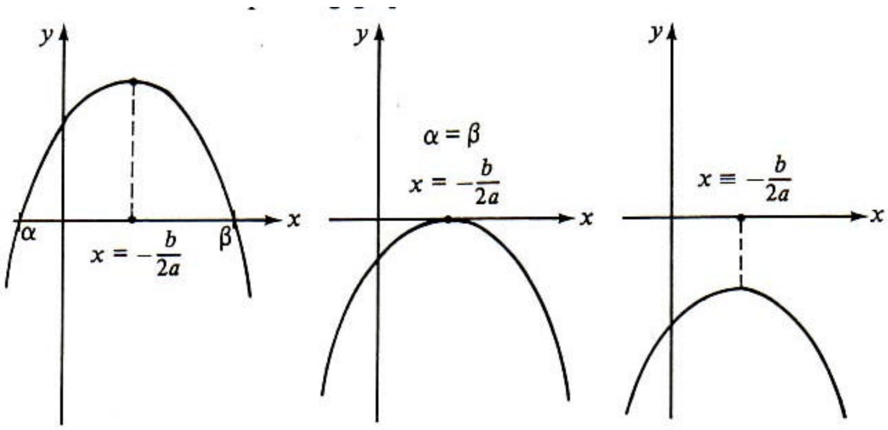
a) Jika $b^2 - 4ac > 0$, maka penyelesaian ? dan ß berbeda dan riel.

b) Jika $b^2 - 4ac = 0$, maka penyelesaian ? dan ß sama dan riel.

c) Jika $b^2 - 4ac < 0$, maka penyelesaian ? dan ß memuat akar dari suatu bilangan negatif dan Anda mengatakan bahwa persamaan kuadrat tidak mempunyai penyelesaian riel.



a > 0	*a > 0*	*a > 0*
dan	dan	dan
$b^2 - 4ac > 0$	$b^2 - 4ac = 0$	$b^2 - 4ac < 0$



$a < 0$	$a < 0$	$a < 0$
dan	dan	dan
$b^2 - 4ac > 0$	$b^2 - 4ac = 0$	$b^2 - 4ac < 0$

Jika a > 0, maka $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, **nilai minimum** $f(x) = -\frac{D}{4a}$ untuk

$x = -\frac{b}{2a}$

Jika a < 0, maka $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0$, **nilai maksimum** $f(x) = -\frac{D}{4a}$ untuk

$x = -\frac{b}{2a}$.

Nilai minimum atau nilai maksimum seringkali disebut sebagai **nilai ektrim**.

Titik P($-\frac{b}{2a}$, $-\frac{D}{4a}$) merupakan **titik puncak** parabola.

Garis yang melalui titik puncak dan sejajar dengan sumbu-*y* disebut sumbu simetri parabola. Persamaan **sumbu simetri** adalah $x = -\frac{b}{2a}$.

a) Setiap persamaan kuadrat dapat disajikan dalam bentuk
   $x^2 - (\alpha + \beta)\, x + \alpha\beta = 0$ dengan α dan β penyelesaian dari persamaan tersebut.

b) Jika ? dan ß penyelesaian dari persamaan $ax^2 + bx + c = 0$, maka

$$(? + ß) = -\frac{b}{a} \text{ dan } ?ß = \frac{c}{a}$$

d. Tugas 3

Kerjakan soal-soal berikut dengan cermat.

1) Tentukan nilai k agar persamaan $x^2 + 3x + 7 = k$ mempunyai penyelesaian riel.
2) Gambarlah grafik dari $y = x^2 + 4$ untuk $-4 = x = 4$. Pada bidang Cartesius dengan skala 2 cm pada sumbu-x untuk menyatakan 1 satuan dan 1 cm pada sumbu y untuk menyatakan 2 satuan.

   Tentukan:

   a) sumbu simetri dari grafik $y = x^2 + 4$,

   b) nilai ekstrim fungsi.
3) Misal ? dan ß akar dari persamaan $x^2 + px + 1 = 0$ serta ? dan ? akar dari persamaan $x^2 + qx + 1 = 0$, tunjukkan bahwa

   (? - ?) (ß – ?) (? + ?) (ß + ?) = $q^2 - p^2$.

e. Tes Formatif 3

Kerjakan soal-soal berikut dengan cermat.

1) Tunjukkan bahwa $2x^2 + 2x + 1$ selalu positif untuk semua nilai x.
2) Gambarlah grafik dari $y = x^2 + 2x + 2$ untuk $-3 = x = 3$. Dari grafik tersebut tentukan:

   a) nilai terkecil dari y dan nilai x yang sesuai dengannya,

   b) nilai dari y jika x = - 2,7; 1, 4; dan 2, 3.
3) Jika ? dan ß akar dari persamaan $2x^2 + 3x - 2 = 0$, bentuklah persamaan yang akar-akarnya adalah:

   a) $?^2$ dan $ß^2$

   b) $\frac{1}{?}$ dan $\frac{1}{?}$

g. Kunci Jawaban Tes Formatif 3

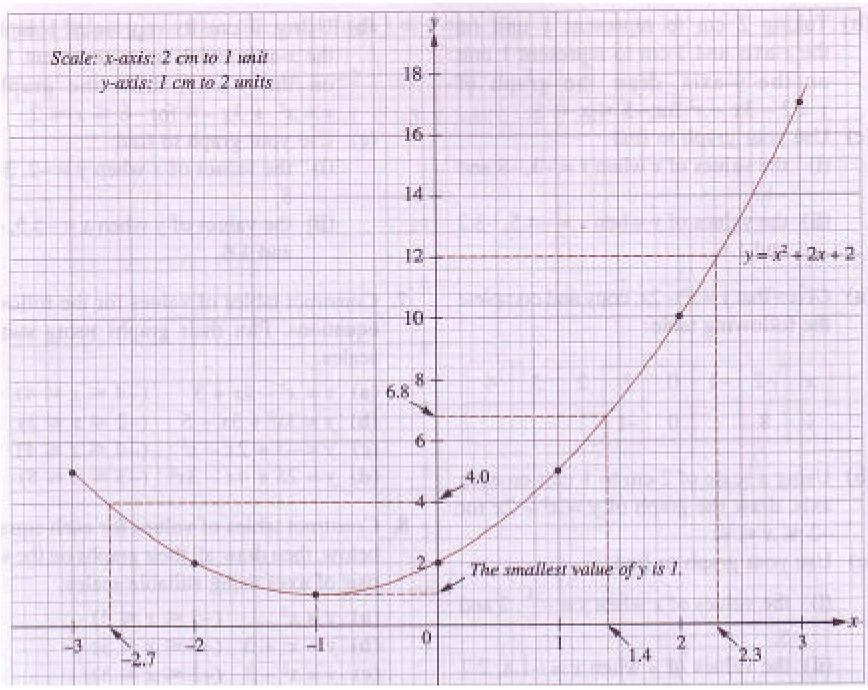
1) Bukti: dengan penyelesaian bentuk kuadrat, didapat $2x^2 + 2x + 1 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$ yang merupakan jumlah dari bilangan tidak negatif dengan bilangan positif.

   Jadi $2x^2 + 2x + 1$ selalu positif untuk suatu bilangan riel x.

2) Tabel berikut adalah daftar harga $y = x^2 + 2x + 2$ untuk $- 3 = x = 3$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	5	2	1	2	5	10	17

   Grafik dari $y = x^2 + 2x + 2$ adalah:



   Jika x = 1,4, maka y ˜ 6,8.

   Jika x = 2,3, maka y ˜ 12.

3) a) $4x^2 – 17x + 4 = 0$

   b) $2x^2 – 3x – 2 = 0$

4. Kegiatan Belajar 4

a. Tujuan Kegiatan Belajar 4

Setelah mempelajari kegiatan belajar 4, diharapkan Anda dapat:

✍ menggambar dan menerapkan fungsi eksponen.

b. Uraian Materi 4

Sebelum Anda mempelajari fungsi eksponen, ada baiknya Anda ingat kembali arti dan sifat-sifat bilangan berpangkat berikut:

Arti bilangan berpangkat

$a^p = a \times a \times a \times \ldots \times a$ sebanyak p faktor

Bila $a^p = b$, maka a disebut bilangan pokok, p disebut pangkat atau eksponen dan b disebut hasil perpangkatan.

Sifat-sifat bilangan berpangkat meliputi:

1) $a^p \times a^q = a^{p+q}$
2) $a^p : a^q = a^{p-q}$
3) $a^0 = 1$
4) $a^p \times b^p = (ab)^p$
5) $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$, a ? 0
6) $a^{\frac{m}{n}}$? $\sqrt[n]{a^m}$ untuk n bilangan bulat positif dan n ? 1, serta m bilangan bulat.

Misal a bilangan riel positif yang tidak sama dengan 1, maka untuk setiap bilangan riel x dapat ditentukan bilangan riel a^x yang tunggal. Dengan demikian f: x ? a^x merupakan suatu fungsi yang memetakan x ke a^x. Karena x pada a^x merupakan pangkat atau eksponen, maka f: x ? a^x disebut fungsi eksponen.

Contoh:

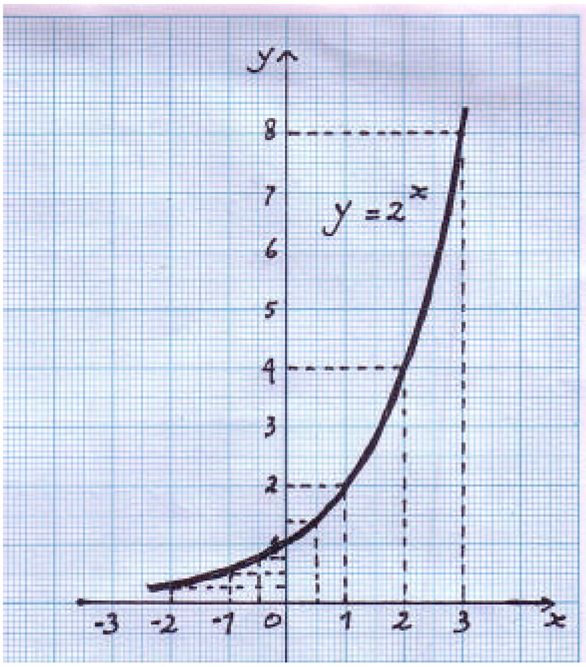
Gambarlah grafik dari $y = 2^x$.

Penyelesaian:

Untuk menggambar grafik dari $y = 2^x$ terlebih dahulu dibuat tabel harganya sebagai berikut:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
2^x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	˜ 0,71	1	˜ 1,41	2	4	8

Grafik dari $y = 2^x$ adalah:



c. Rangkuman 4

Misal a ? 1bilangan riel positif, maka untuk setiap bilangan riel x fungsi f: x ? a^x disebut **fungsi eksponen**.

d. Tugas 4

Kerjakan semua soal berikut dengan cermat.

1) Gambarlah grafik dari:

   a) $y = 3^{x,}$

   b) $y = 1 + 2^{x.}$

2) Apa yang dapat Anda katakan tentang grafik dari $y = 1^x$?

3) Gambarlah grafik dari $y = 2^x$ dan $y = 1 + 2^x$ pada bidang Cartesius yang sama.

   Apa yang dapat Anda jelaskan dari kedua grafik tersebut?

e. Tes Formatif 4

Kerjakan semua soal berikut dengan cermat.

1) Gambarlah grafik dari:

   a) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

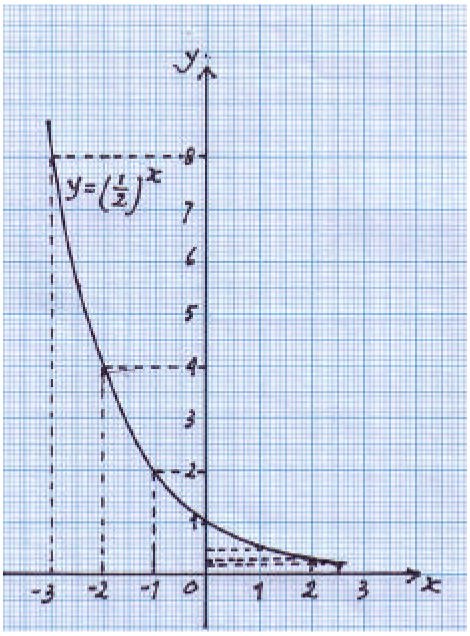
   b) $y = 2 + 2^x$

   c) $y = 2^{x+1}$

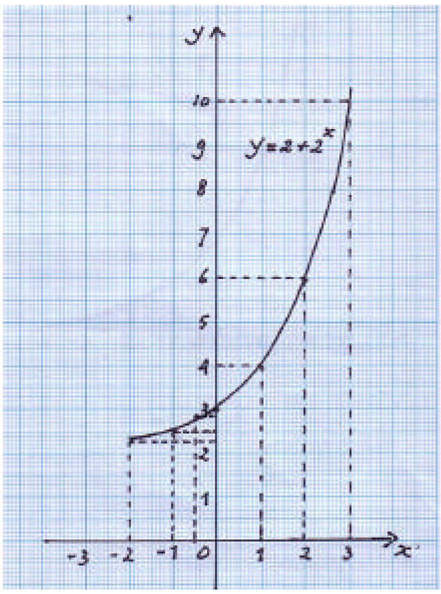
2) Apa yang dapat Anda katakan tentang grafik dari $y = 2^x$ dan grafik dari $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

f. Kunci Jawaban Tes Formatif 4

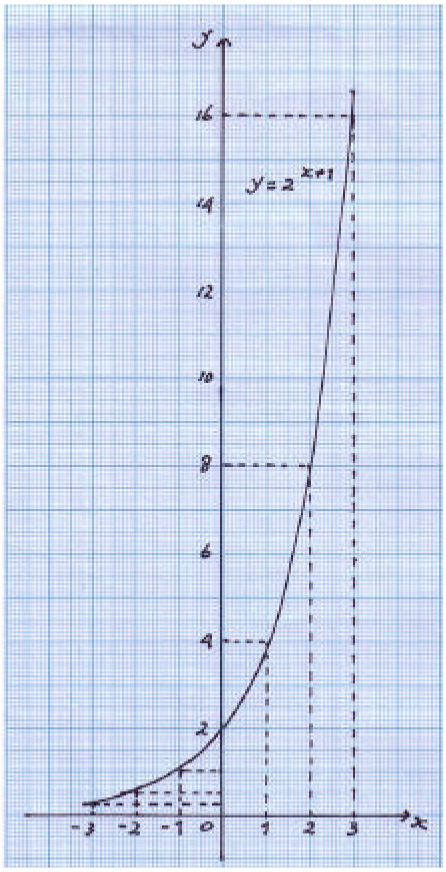
1) a) Grafik dari $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ adalah



b) Gambar di samping adalah grafik dari $y = 2 + 2^x$



c) Grafik dari $y = 2^{x+1}$ adalah



2) Grafik dari $y = 2^x$ dan grafik dari $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ simetris terhadap sumbu y.

5. Kegiatan Belajar 5

a. Tujuan Kegiatan Belajar 5

Setelah mempelajari kegiatan belajar 5, diharapkan Anda dapat:

✍ memahami fungsi logaritma dan grafiknya beserta penerapannya.

b. Uraian Materi 5

Sebelum mempelajari fungsi logaritma, ada baiknya Anda mengingat kembali arti dan sifat-sifat logaritma berikut ini.

Arti logaritma:

$^{a}\log b = c$, artinya $a^{c} = b$

Pada $^{a}\log b = c$, a merupakan bilangan pokok, b bilangan yang dicari logaritmanya, dan c hasil logaritma.

Berikut disajikan sifat-sifat logaritma.

1) $^{a}\log xy = {}^{a}\log x + {}^{a}\log y$
2) $^{a}\log \frac{x}{y} = {}^{a}\log x - {}^{a}\log y$
3) $^{a}\log x^{n} = n\,{}^{a}\log x$
4) $^{x}\log y = \frac{^{a}\log x}{^{a}\log y}$

Selanjutnya perhatikan kembali fungsi eksponen $f: x$? 2^{x}. Dari grafiknya yang telah Anda gambar di kegiatan belajar 4, Anda dapat mengetahui bahwa fungsi $f: x$? 2^{x} adalah fungsi satu-satu pada. Jadi Anda dapat menentukan invers dari fungsi tersebut, sebut invers tersebut sebagai f^{-1}. Untuk itu, marilah kita cermati tabel harga untuk f dan f^{-1} berikut ini.

x	-2	-1	0	1	2	3
f	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

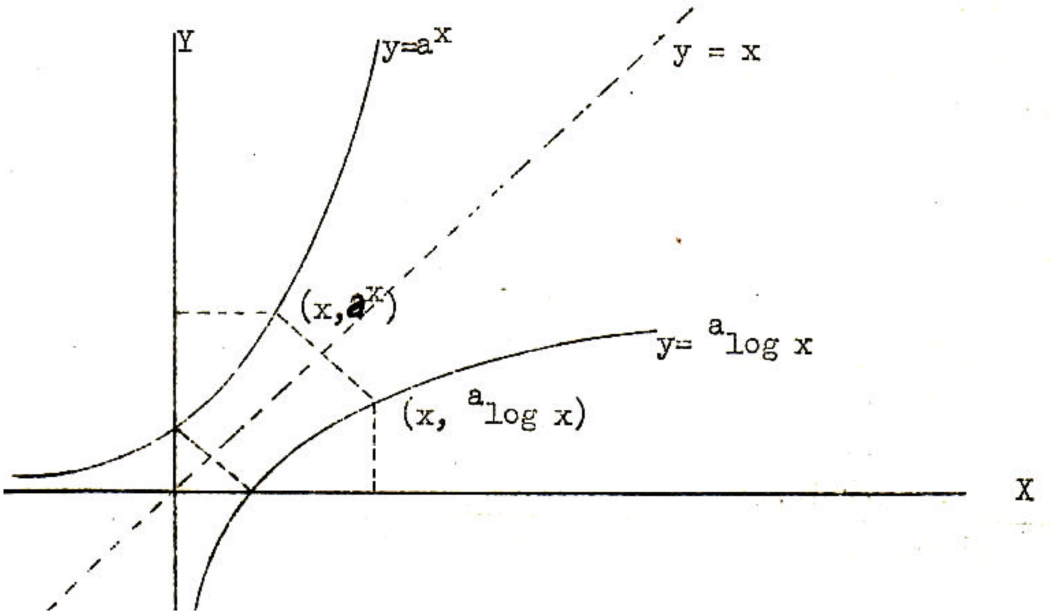
x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
f^{-1}	-2	-1	0	1	2	3

Dari tabel untuk f^{-1}, Anda menentukan rumusnya, yaitu $f^{-1}(x) = {}^{2}\log x$.

Jadi anda dapat menyimpulkan bahwa invers dari $f: x$? 2^x adalah:

$f^{-1}:x$? ${}^{2}\log x$. Dengan demikian jika $y = 2^x$ dan $y = {}^{2}\log x$, Anda gambar grafiknya pada bidang Cartesius yang sama Anda akan mendapatkan bahwa keduanya simetris terhadap garis $y = x$.

Secara umum, Anda dapat menggambar grafik $y = a^x$ dan $y = {}^{a}\log x$ pada bidang Cartesius yang sama, seperti pada gambar berikut.



Selanjutnya suatu fungsi yang bentuk rumusnya $y = {}^{2}\log x$ disebut sebagai **fungsi logaritma.**

Contoh:

Gambarlah grafik dari $y = {}^{2}\log x$ dan $y = {}^{\frac{1}{2}}\log x$ pada bidang Cartesius yang sama. Apa yang dapat Anda katakan tentang grafik dari $y = {}^{2}\log x$ dan $y = {}^{\frac{1}{2}}\log x$?

Penyelesaian:

Untuk menggambar grafik dari $y = {}^{2}\log x$ dan $y = {}^{\frac{1}{2}}\log x$, seperti biasa, Anda perlu membuat tabel harga terlebih dahulu.

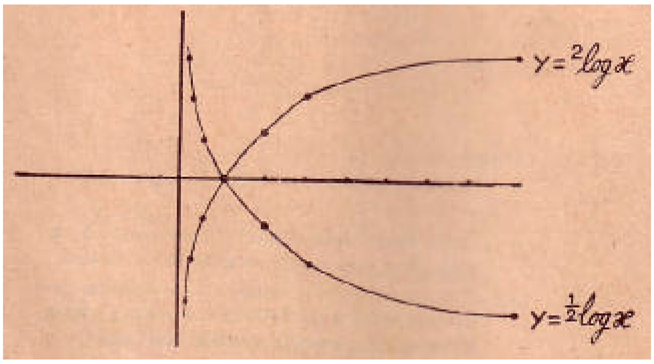
Tabel harga untuk $y = {}^{2}\log x$

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	-3	-2	-1	0	1	2	3

Tabel harga untuk $y = {}^{\frac{1}{2}}\log x$

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	3	2	1	0	-1	-2	-3

Dari kedua tabel tersebut, Anda dapat menggambar grafiknya seperti gambar berikut:



Grafik $y = {}^{2}\log x$ dan $y = {}^{\frac{1}{2}}\log x$ simetris terhadap sumbu x.

c. Rangkuman 5

Fungsi logaritma adalah fungsi yang bentuk rumusnya $y = {}^{a}\log x$**.**

d. Tugas 5

Kerjakan soal-soal berikut dengan cermat.

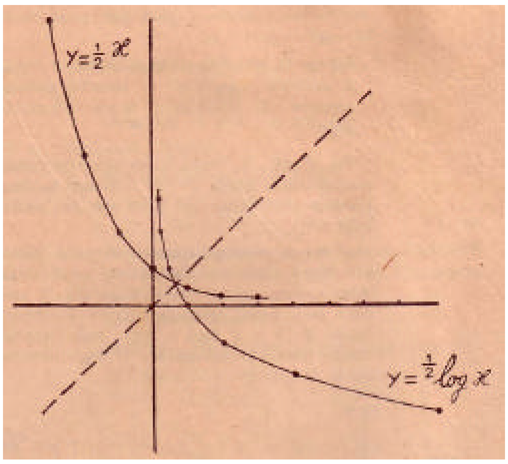
1)

e. Tes Formatif 5

Gambarlah grafik dari y = $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ dan $y = {}^{\frac{1}{2}}\log x$ pada bidang Cartesius yang sama. Apa yang dapat Anda jelaskan dari grafik keduanya.

f. Kunci Jawaban Tes Formatif 5

Grafik dari y = $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ dan $y = {}^{\frac{1}{2}}\log x$ adalah:



Dari gambar terlihat bahwa keduanya simetris terhadap garis y = x.

6. Kegiatan Belajar 6

a. Tujuan Kegiatan Belajar 6

Setelah mempelajari kegiatan belajar 6, diharapkan Anda dapat:

✍ menggambar grafik fungsi trigonometri.

b. Uraian Materi 6

Pada kegiatan belajar ini, akan didiskusikan grafik dari fungsi trigonometri. Sifat utama grafik fungsi ini adalah periodik. Dalam matematik, suatu fungsi *f* dikatakan **periodik** dan mempunyai **periode k**, jika ***f* (*k* + *x*) = *f* (*x*)** untuk setiap *x.*

Sebelum Anda menggambar grafik fungsi trigonometri, sebaiknya Anda mengingat kembali nilai sinus, cosinus, dan tangen suatu sudut. Untuk itu, berikut ini disajikan tabel nilai-nilai tersebut.

Sudut ?		sin ?	cos ?	tan ?
Derajat	Radian			
0^0	0	0	1	0
30^0	$\frac{?}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45^0	$\frac{?}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60^0	$\frac{?}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90^0	$\frac{?}{2}$	1	0	?
120^0	$\frac{2?}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
135^0	$\frac{3?}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	- 1
150^0	$\frac{5?}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
180^0	?	0	- 1	0

210^0	$\frac{7?}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
225^0	$\frac{5?}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
240^0	$\frac{4?}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
270^0	$\frac{3?}{2}$	- 1	0	?
300^0	$\frac{5?}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
315^0	$\frac{7?}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	- 1
330^0	$\frac{11?}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
360^0	2?	0	1	0

1) *Grafik fungsi y = sin x*

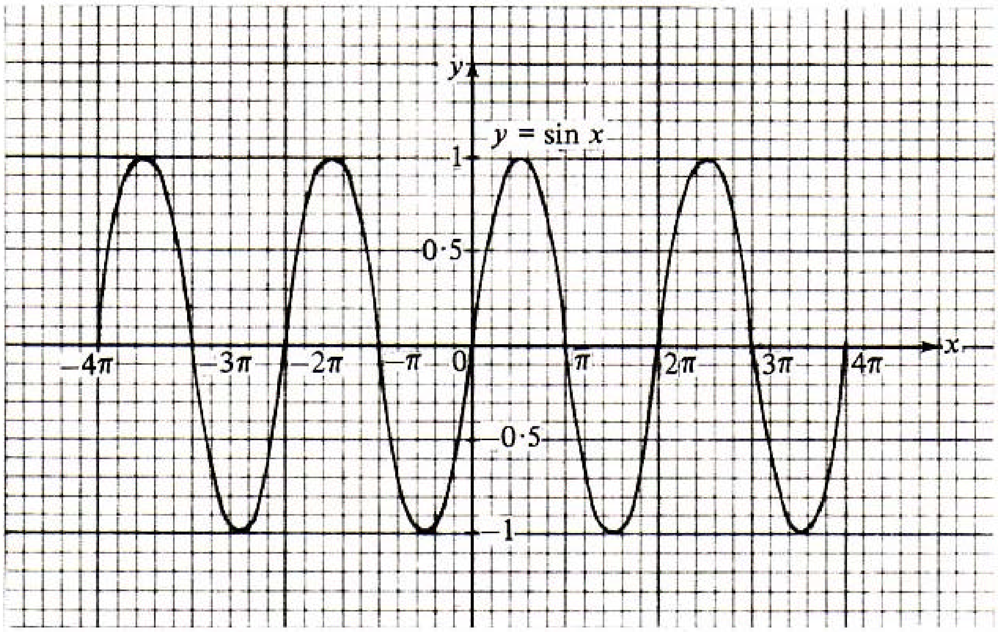
Fungsi $y = \sin x$, disebut **fungsi sinus**, mempunyai sifat-sifat berikut:

a) sin (2? + *x*) = sin *x*, karena itu fungsi sinus periodik dengan periode 2?. Jadi penambahan 2? ke argumen fungsi sinus tidak mengubah nilai fungsi,

b) sin (- *x*) = -sin *x*, karena itu fungsi sinus merupakan fungsi ganjil atau fungsi ganjil. Jadi grafik fungsi sinus simetris terhadap O.

c) – 1 = *x* = 1 untuk setiap bilangan riel *x,* karena itu nilai maksimum dan minimum fungsi sinus berturut-turut adalah 1 dan - 1.

Dengan memperhatikan tabel nilai sinus dan sifat-sifat fungsi sinus, Anda memperoleh grafik fungsi sinus berikut.



2) *Grafik fungsi y = cos x*

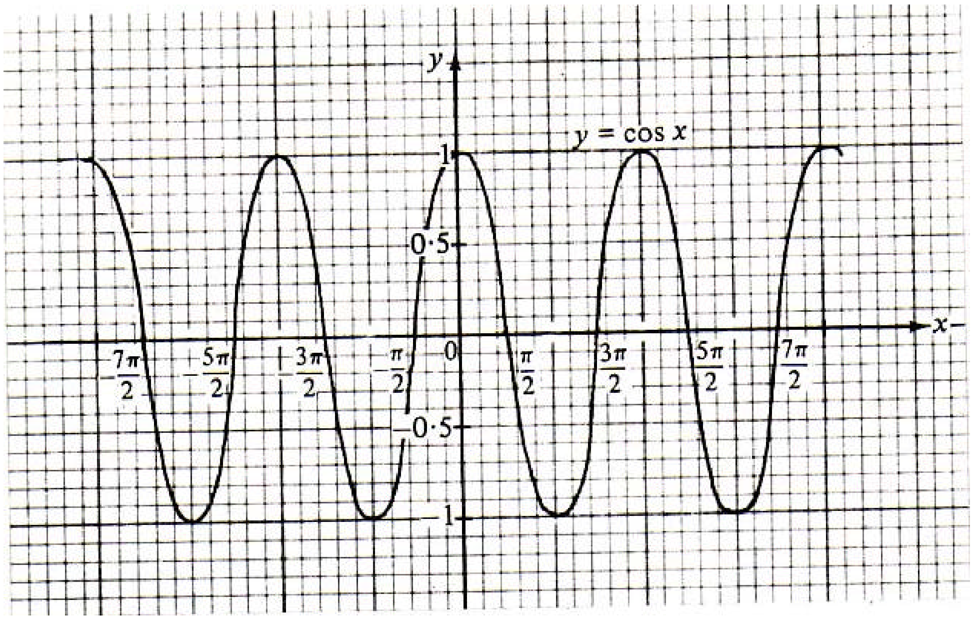
Sebelum Anda menggambar grafik ***y* = cos *x***, yang disebut **fungsi cosinus**, kita perhatikan dulu sifat-sifat fungsi tersebut. Sifat-sifat tersebut adalah:

a) cos (2? + *x*) = cos *x,* karena itu fungsi cosinus merupakan fungsi periodik dengan periode 2?. Jadi penambahan 2? pada argumentidak mengubah nilai fungsi.

b) cos (- *x*) = cos *x*, karena itu fungsi cosinus merupakan fungsi genap. Jadi grafik fungsi cosinus simetris terhadap sumbu *y.*

c) – 1 = *x* = 1 untuk setiap bilangan riel *x,* karena itu nilai maksimum dan minimum fungsi sinus berturut-turut adalah 1 dan - 1.

Berdasarkan sifat-sifat tersebut dan tabel harga cosinus, Anda dapat menggambar grafik fungsi cosinus seperti gambar berikut.



Jika Anda mencermati grafik fungsi y = sin x dan y = cos x, maka kedua grafik tersebut kelihatan sama. Perbedaannya hanya terletak pada posisinya terhadap sumbu-x. Hal ini dikarenakan oleh $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ = cos x. Jadi grafik y = cos x dapat diperoleh dengan melakukan translasi terhadap grafik y = sin x sejauh $\frac{\pi}{2}$ sepanjang sumbu x.

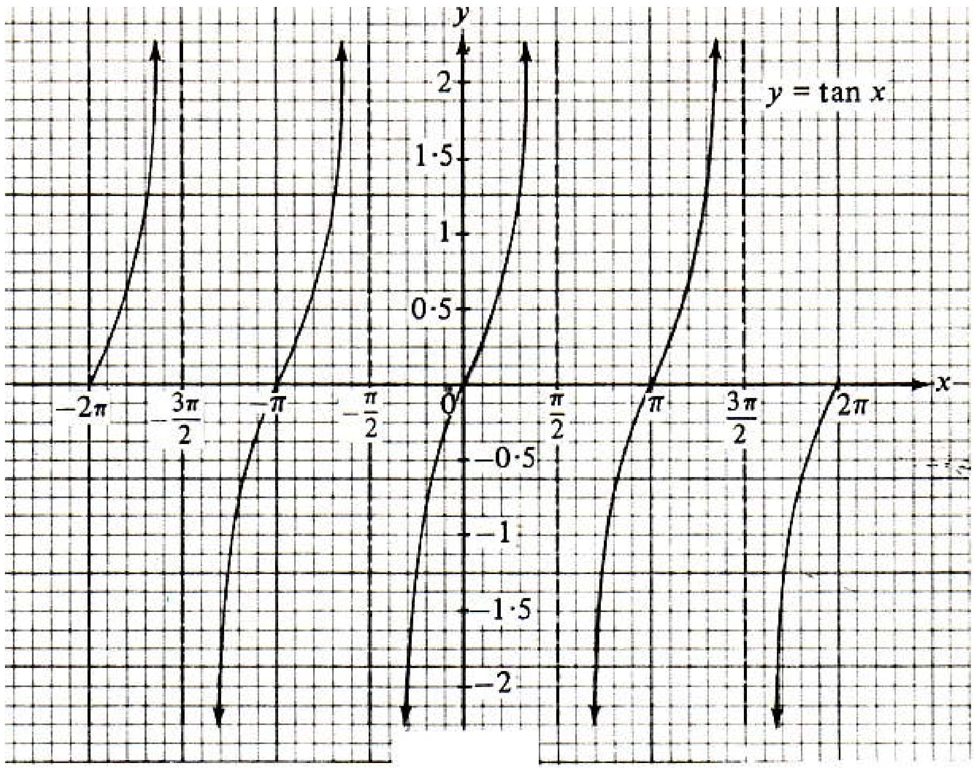
3) *Grafik fungsi y = tan x*

Fungsi ***y* = tan *x*** disebut **fungsi tangen**, yang grafiknya mempunyai sifat-sifat berikut.

a) tan (- x) = - tan x, karena itu fungsi sinus merupakan fungsi ganjil atau fungsi ganjil. Jadi grafik fungsi sinus simetris terhadap O.

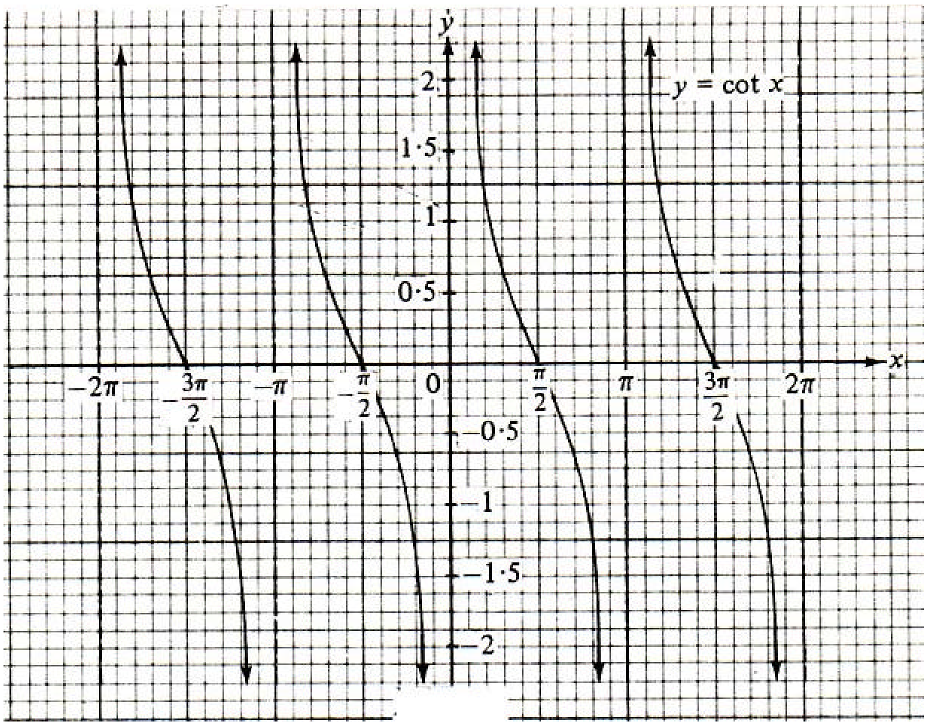
b) tan (π + x) = tan x, karena itu fungsi tangen juga merupakan fungsi periodik. Tetapi tidak seperti fungsi sinus dan cosinus, periode fungsi tangen adalah π.

c) Fungsi tangen tidak didefinisikan untuk x = ? $\frac{?}{2}$, ? $\frac{3?}{2}$, ? $\frac{5?}{2}$,…. Jadi grafik y = tan x tidak ada pada titik-titik tersebut. Jika x mendekati titk-titik tersebut, nilai tan x membesar terus tanpa batas. Pada gambar grafik tan x, Anda dapat melihat bahwa garis-garis vertikal yang melalui titik-titik tersebut didekati oleh grafik y = tan x, tetapi tidak pernah disentuh. Garis-garis vertikal tersebut dinamakan **asimptot vertikal** atau **asimptot tegak**.

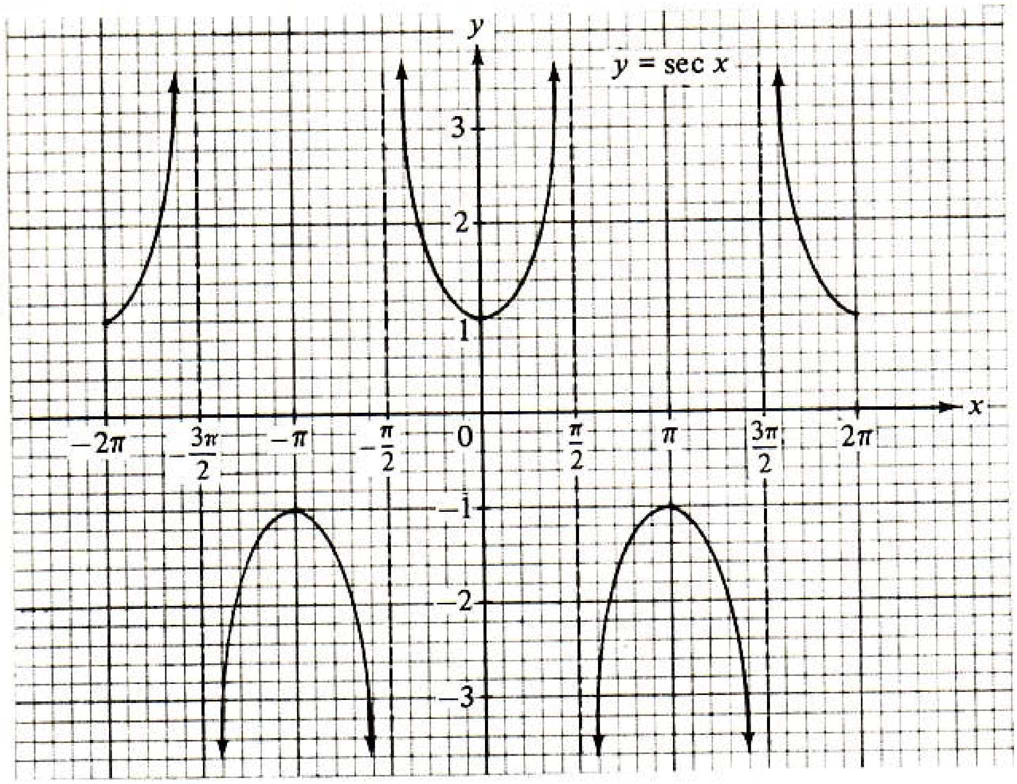


Selanjutnya akan disajikan grafik dari fungsi cotangen yang dinyatakan sebagai y = cot x, fungsi secan yang dinyatakan sebagai y = sec x, dan fungsi cosecan yang dinyatakan sebagai y = cosec x. Perhatikan bahwa fungsi-fungsi ini juga periodik. Periode untuk fungsi cotangen adalah ? dan periode untuk fungsi secan dan cosecan adalah 2?.

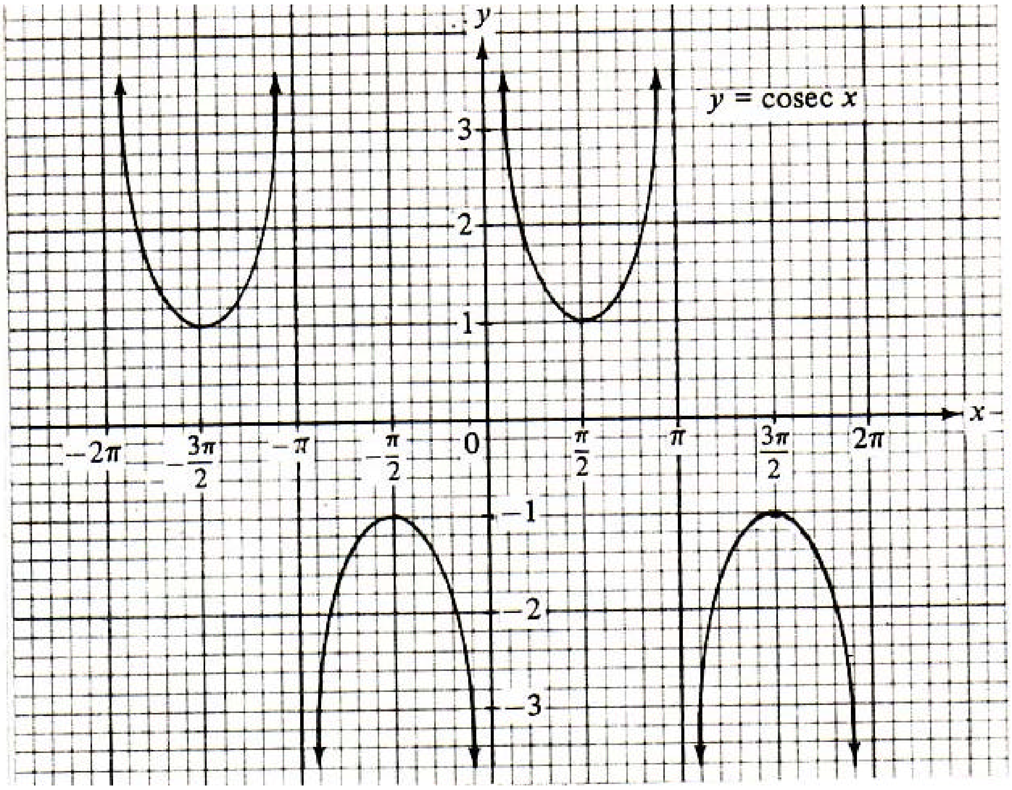
Dengan memperhatikan tabel harga tangen ? dan hubungan antara tangen ? dan cotangen ?, yaitu cot ? = $\frac{1}{\tan ?}$, Anda dapat menggambar grafik fungsi cotangen, yaitu *y* = cot *x.* Berikut ini adalah grafik dari **fungsi cotangen, *y* = cot *x*.**



Anda juga dapat menggambar grafik dari fungsi secan, yaitu *y* = sec *x*, dengan memperhatikan tabel nilai cos ? dan hubungan antara cos ? dan sec ?. Tentunya Anda sudah memahami bahwa sec ? = $\frac{1}{\cos ?}$. Berikut adalah grafik dari **fungsi secan** yaitu ***y = sec x.***



Selanjutnya Anda dapat menggambar fungsi cosecan dengan memperhatikan tabel harga sinus ? dan hubungan antara sinus ? dengan cosecan ?, yaitu cosec ? = $\frac{1}{\sin ?}$. Berikut adalah grafik dari **fungsi cosecan** yang persamaannya adalah ***y* = cosec *x*.**



Contoh 1:

Gambarlah grafik dari $y = 2\cos x + 1\frac{1}{2}\sin x$, untuk $0 < x < 360^{0}$.

Penyelesaian:

$y = 2\cos x + 1\frac{1}{2}\sin x$

Misal tan ? = $1\frac{1}{2}$, maka y = 2 cos x + tan ? sin x

= 2 cos x + $\frac{\sin ?}{\cos ?}$ sin x

= $\frac{2}{\cos ?}$ (cos ? cos x + sin ? sin x)

= $\frac{2}{\cos ?}$ cos (x - ?)

Karena tan ? = $1\frac{1}{2}$ = $\frac{3}{4}$, maka cos ? = $\frac{4}{5}$.

Dengan demikian $y = \frac{5}{2}$ cos (x - ?).

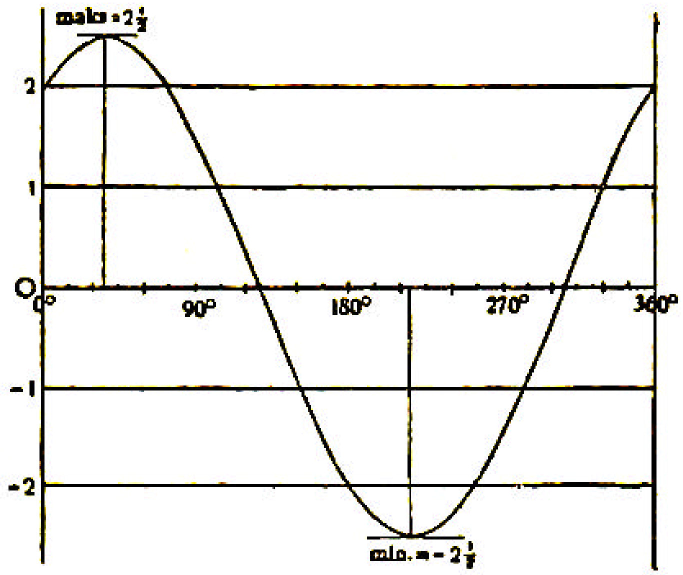
y maksimum = $\frac{5}{2}$ untuk cos (x - ?) = 1 atau x = ? + k. $360^{0.}$

y minimum = - $\frac{5}{2}$ untuk cos (x - ?) = - 1 atau x = ? + (2k + 1) $180^{0.}$

Titik potong grafik dengan sumbu x diperoleh jika cos (x - ?) = 0 atau x = ? + (2k + 1) $90^{0.}$

Titik potong dengan sumbu y diperoleh jika $x = 0^{0.}$ Titik potong tersebut adalah titik (0, 2).

Jadi grafik dari $y = 2 \cos x + 1\frac{1}{2} \sin x$, untuk $0 < x < 360^0$ adalah:



Contoh 2:

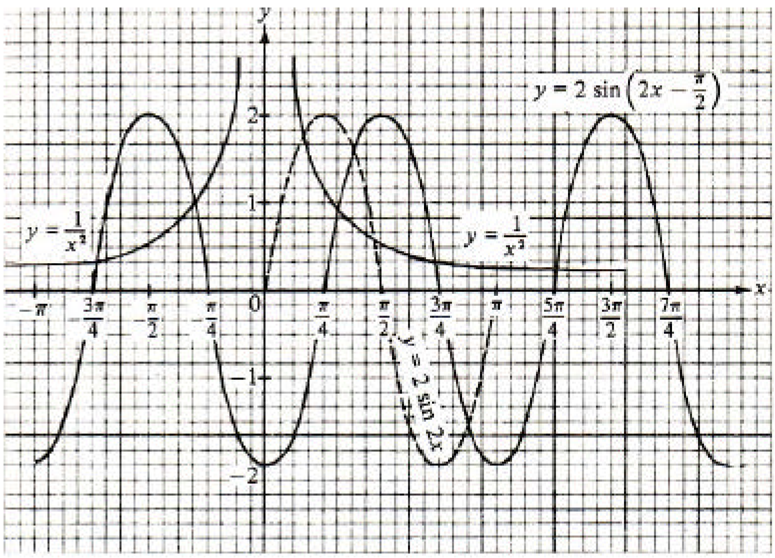
Sketsalah grafik y = 2 sin ?2x ? $\frac{?}{2}$?. Dengan sketsa tersebut tunjukkan bahwa persamaan x^2 sin ?2x ? $\frac{?}{2}$? = $\frac{1}{2}$ hanya mempunyai 2 penyelesaian antara 0 dan ?.

Penyelesaian:

Grafik dari y = 2 sin $?2x ? \frac{?}{2}?$ mempunyai nilai maksimum dan minimum berturut-turut adalah 2 dan – 2. Periode dari grafik y = 2 sin $?2x ? \frac{?}{2}?$ adalah $\frac{2?}{2}$ = $?$.

Untuk mendapatkan grafik y = 2 sin $?2x ? \frac{?}{2}?$ dapat dilakukan dengan menggeser grafik y = 2 sin 2x ke kanan sejauh $\frac{?}{4}$.

Berikut adalah sketsa dari grafik y = 2 sin $?2x ? \frac{?}{2}?$.



Persamaan x^2 sin $?2x ? \frac{?}{2}?$ = $\frac{1}{2}$ dapat ditulis sebagai 2 sin $?2x ? \frac{?}{2}?$ = $\frac{1}{x^2}$

Penyelesaian persamaan ini adalah absis dari titik potong antara grafik y = 2 sin $?2x ? \frac{?}{2}?$ dengan y = $\frac{1}{x^2}$. Dari gambar terlihat bahwa titik potong tersebut hanya ada dua yang terletak di antara 0 dan $?$..

c. Rangkuman 6

Suatu fungsi *f* dikatakan **periodik** dan mempunyai **periode k**,

jika ***f* (*k* + *x*) = *f* (*x*)** untuk setiap *x*.

Fungsi sinus berbentuk ***y* = sin *x*.**

Fungsi ***y* = cos *x*** disebut **fungsi cosinus.**

Fungsi ***y* = tan *x*** disebut **fungsi tangen.**

Fungsi secan berbentuk ***y* = *sec x.***

Fungsi cosecan berbentuk ***y* = cosec *x.***

d. Tugas 6

Sketsalah grafik dari fungsi-fungsi berikut, kemudian tentukan nilai maksimum, nilai minimum, dan periode dari setiap fungsi.

a. $y = 3 \cos 3x$

b. $y = 3 \tan 2x$

c. $y = -2 \sin \frac{x}{2}$

d. $y = 2 \sin ?x ? \frac{?}{2}?$

e. $y = 3 \cos ?x ? \frac{?}{2}?$

e. Tes Formatif 6

Kerjakan soal-soal berikut dengan cermat.

1) Sketsalah grafik dari $y = 3 \cos 5x$.
2) Tentukan nilai maksimum, nilai minimum, dan periode dari fungsi-fungsi berikut, jika ada.
   a) $y = -5 \cos 2x$
   b) $y = 4 \sin ?2x ? \frac{?}{2}?$

c) $y = \frac{1}{2}\tan ?x ? ? ?$

f. Kunci Jawaban Tes Formatif 6

1) Karena – 1 = cos 5 x = 1, maka – 3 = y = 3 cos 5 x = 3.

   Nilai y nol jika 5x = $? \frac{?}{2}, ? \frac{3?}{2}, ? \frac{5?}{2}, \ldots.$

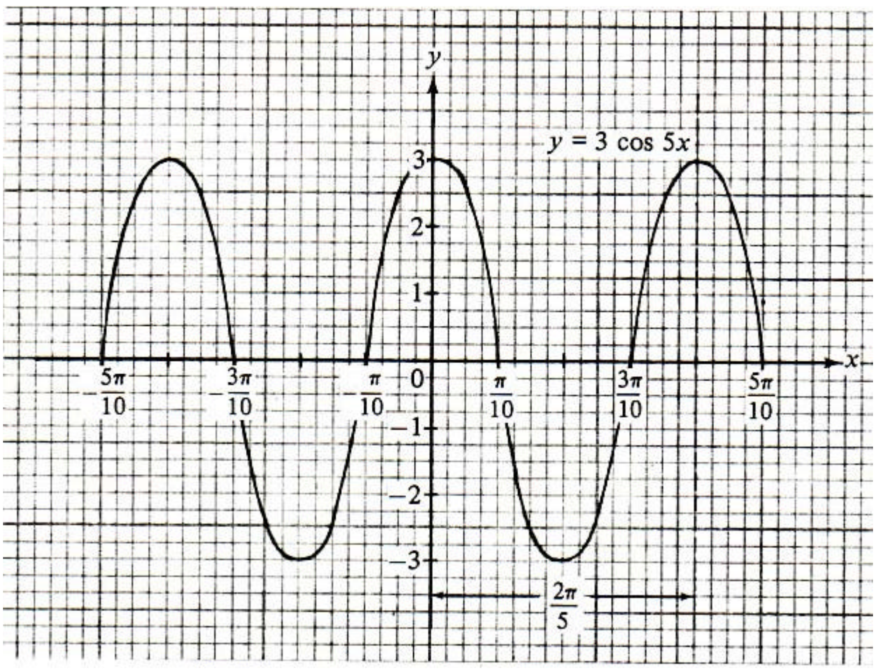
   atau x = $? \frac{?}{10}, ? \frac{3?}{10}, ? \frac{5?}{10} ? \frac{?}{2}, \ldots.$

   Jika x naik sebesar $\frac{2?}{5}$, maka 5x naik sebesar $5 ? x ? \frac{2?}{5} ? - 5x = 2?$.

   Dengan demikian nilai berulang. Karena itu, periode grafik adalah $\frac{2?}{5}$.

   Grafik y serupa dengan grafik fungsi cosinus kecuali nilai maksimum dan minimumnya yang berturut-turut adalah 3 dan -3 dan periodenya $\frac{2?}{5}$.

   Sketsa grafik y = 3 cos 5 x sebagai berikut.



2) a) 5, - 5, ?

   b) 4, - 4, ?

   c) tidak ada maksimum dan minimum, ?.

BAB III. EVALUASI

A. Soal Tes Evaluasi

Selesaikan soal-soal berikut dengan cermat.

1. Dari suatu jajar genjang diketahui 3 buah titik sudutnya, yaitu $A(-5, 1)$, $B(3, -5)$, dan $C(2, 2)$. Tentukan titik sudut D.
2. Pardede membuat dan menjual mainan. Dia mengetahui bahwa jika sekelompok mainan yang terdiri dari x mainan dibuatnya, dengan

   $1 = x = 14$, biaya setiap mainan adalah y rupiah yang ditentukan dengan persamaan $y = x^2 - 18x + 110$.

   a) Gambarlah grafik dari $y = x^2 - 18x + 110$ dari $x = 0$ sampai $x = 14$.

   b) Gunakan grafik tersebut untuk menentukan banyak mainan dalam satu kelompok sedemikian hingga biaya setiap mainan

      1) minimum

      2) kurang dari 60 rupiah
3. Apa yang dapat Anda katakan tentang grafik dari $y = 2^x$ dan $y = {}^2\log x$ terhadap garis $y = x$?
4. Jika ? dan ß penyelesaian dari persamaan $x^2 - 12x + 7 = 0$, tentukan nilai dari:

   a) (? - 1) (ß – 1)

   b) $\frac{?^2}{?} + \frac{?^2}{?}$
5. Selidiki fungsi $y = 2 \cos^2 x - 2 \cos x + 1$.

B. Kunci Jawaban Tes Evaluasi

1. D (-6, 8)
2. a)

   b) 1) y minimum jika x =9

   2) y < 60, jika x ? 4.

3. Grafik dari $y = 2^x$ dan $y = {}^2\log x$ simetris terhadap garis $y = x$.

4. a) - 4

   b) $210\frac{6}{7}$

5. Fungsi tidak mempunyai titik nol, sebab D < 0.

   Titik potong dengan sumbu-y adalah titik (0, 1)

   Minimum $\frac{1}{2}$ untuk cos x = $\frac{1}{2}$.

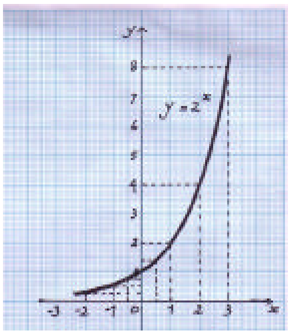
C. Kunci Jawaban Cek Kemampuan

1. Pada suatu relasi tidak semua anggota domain mempunyai pasangan di codomain, sedangkan pada fungsi semua anggota domain harus mempunyai pasangan di codomain. Dengan demikian suatu fungsi pasti relasi, tetapi suatu relasi belum tentu fungsi.
2. a. $T\left(\frac{29}{25}, \frac{22}{25}\right)$

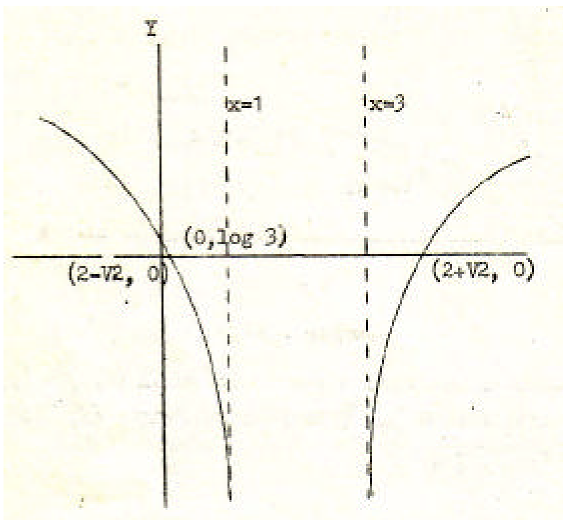
   b. Ya, kedua garis saling tegak lurus.

   c. $3x + 4y = 9$
3. Titik ekstrim E(-2, -25) dan sumbu simetrinya $x = -2$.
4. Banyak sel pada hari ke sepuluh $2^{10} = 1.024$

   $y = 2^x$, grafiknya sebagai berikut:



5.



6. Penyelesaian:

Kedua suku di ruas kanan adalah positif, sedangkan hasil kalinya = 4 (tetap). Jadi jumlah kedua suku minimum, jika keduanya sama besar atau

$\tan x = 4 \cot x$

$\tan^2 x = 4$

$\tan x = 2$ ($\tan x = -2$ tidak terpakai sebab $0^0 < x < 90^0$)

Jadi minimum fungsi = 4.

Karena kedua suku di ruas kanan dapat menjadi besar tak hingga, maka fungsi tidak mempunyai maksimum.

Asimptot tegak adalah sumbu *y* dan garis $x = 90^0$.

Karena kedua suku positif, maka grafik tidak memotong sumbu *x*.

BAB IV. PENUTUP

Setelah menyelesaikan modul ini, Anda berhak untuk mengikuti tes praktek untuk menguji kompetensi yang telah Anda pelajari. Apabila Anda dinyatakan memenuhi syarat kelulusan dari hasil evaluasi dalam modul ini, maka Anda berhak untuk melanjutkan ke topik/modul berikutnya.

Mintalah pada guru untuk uji kompetensi dengan sistem penilaian yang dilakukan langsung oleh pihak industri atau asosiasi yang berkompeten apabila Anda telah menyelesaikan seluruh evaluasi dari setiap modul, maka hasil yang berupa nilai dari guru atau berupa portofolio dapat dijadikan bahan verifikasi oleh pihak industri atau asosiasi profesi. Kemudian selanjutnya hasil tersebut dapat dijadikan sebagai penentu standar pemenuhan kompetensi dan bila memenuhi syarat Anda berhak mendapatkan sertifikat kompetensi yang dikeluarkan oleh dunia industri atau asosiasi profesi.

DAFTAR PUSTAKA

Alders, C.J. 1982. **Ilmu Ukur Segitiga.** Jakarta: Pradnya Paramita.

Ho Soo Thong, Tay Yong Chiang, Koh Khee Meng. 1980. **College Mathematics Volume 1**. Singapore: Kyoto-Shing Loong.

Lee Peng Yee, Fan Liang Huo, Teh Keng Seng, Looi Chin Keong. 2002. **New Syllabus Mathematics 2**. Singapore: Shinglee Publishers PTE LTD.

------ 2001. **New Syllabus Mathematics 1**. Singapore: Shinglee Publishers PTE LTD.

Lee Peng Yee, Teh Keng Seng, Looi Chin Keong. 1997. **New Syllabus D Mathematics 4**. Singapore: Shinglee Publishers PTE LTD.

------ 1996. **New Syllabus D Mathematics 2**. Singapore: Shinglee Publishers PTE LTD.

Rawuh, R., Teng Tek Hoen, M. Entoem, Gouw Key Hong. 1975. **Ilmu Ukur Analitis Teori dan Soal-soal 1**. Bandung: Tarate.

Sukahar. 1986. **Aljabar**. Surabaya.

Zainuddin, A. Parhusip. 1976. **Aljabar**. Jakarta: Erlangga.