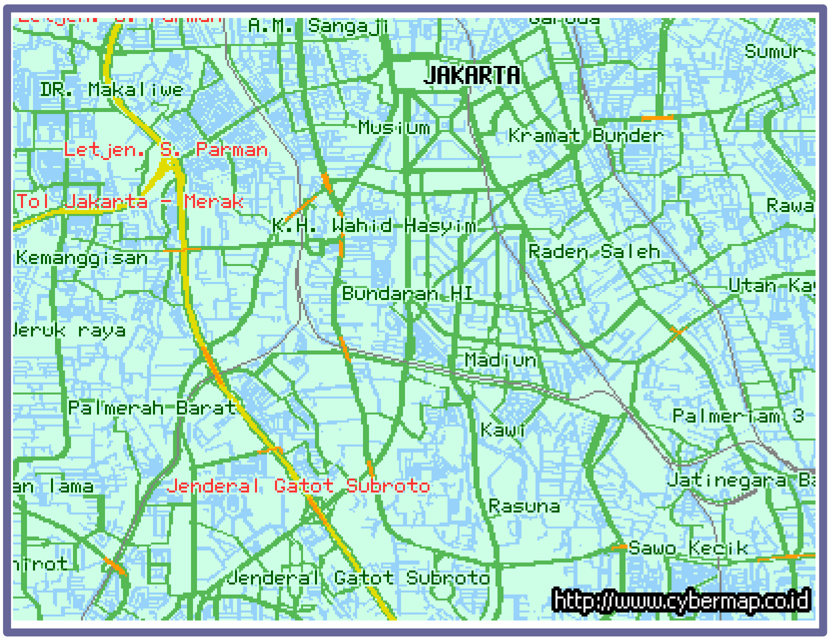
KODE MAT. 15

VEKTOR

BAGIAN PROYEK PENGEMBANGAN KURIKULUM
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH KEJURUAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
2004

Kode MAT.15

Vektor



BAGIAN PROYEK PENGEMBANGAN KURIKULUM
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH KEJURUAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
2004

Kode MAT.15

Vektor

Penyusun:

Dr. Abadi, M.Sc.

Editor:
Dr. Manuharawati, MSi.
Dra. Kusrini, M.Pd.

BAGIAN PROYEK PENGEMBANGAN KURIKULUM
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH KEJURUAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
2004

Kata Pengantar

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa atas karunia dan hidayah-Nya, kami dapat menyusun bahan ajar modul manual untuk SMK Bidang Adaptif, yakni mata pelajaran Fisika, Kimia dan Matematika. Modul yang disusun ini menggunakan pendekatan pembelajaran berdasarkan kompetensi, sebagai konsekuensi logis dari Kurikulum SMK Edisi 2004 yang menggunakan pendekatan kompetensi *(CBT: Competency Based Training).*

Sumber dan bahan ajar pokok Kurikulum SMK Edisi 2004 adalah modul, baik modul manual maupun interaktif dengan mengacu pada Standar Kompetensi Nasional (SKN) atau standarisasi pada dunia kerja dan industri. Dengan modul ini, diharapkan digunakan sebagai sumber belajar pokok oleh peserta diklat untuk mencapai kompetensi kerja standar yang diharapkan dunia kerja dan industri.

Modul ini disusun melalui beberapa tahapan proses, yakni mulai dari penyiapan materi modul, penyusunan naskah secara tertulis, kemudian disetting dengan bantuan alat-alat komputer, serta divalidasi dan diujicobakan empirik secara terbatas. Validasi dilakukan dengan teknik telaah ahli (*expert-judgment*), sementara ujicoba empirik dilakukan pada beberapa peserta diklat SMK. Harapannya, modul yang telah disusun ini merupakan bahan dan sumber belajar yang berbobot untuk membekali peserta diklat kompetensi kerja yang diharapkan. Namun demikian, karena dinamika perubahan sain dan teknologi di industri begitu cepat terjadi, maka modul ini masih akan selalu dimintakan masukan untuk bahan perbaikan atau direvisi agar supaya selalu relevan dengan kondisi lapangan.

Pekerjaan berat ini dapat terselesaikan, tentu dengan banyaknya dukungan dan bantuan dari berbagai pihak yang perlu diberikan penghargaan dan ucapan terima kasih. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini tidak berlebihan bilamana disampaikan rasa terima kasih dan penghargaan yang sebesar-besarnya kepada berbagai pihak, terutama tim penyusun modul (penulis, editor, tenaga komputerisasi modul, tenaga ahli desain grafis) atas dedikasi, pengorbanan waktu, tenaga, dan pikiran untuk menyelesaikan penyusunan modul ini.

Kami mengharapkan saran dan kritik dari para pakar di bidang psikologi, praktisi dunia usaha dan industri, dan pakar akademik sebagai bahan untuk melakukan peningkatan kualitas modul. Diharapkan para pemakai berpegang pada azas keterlaksanaan, kesesuaian dan fleksibilitas, dengan mengacu pada perkembangan IPTEK pada dunia usaha dan industri dan potensi SMK dan dukungan dunia usaha industri dalam rangka membekali kompetensi yang terstandar pada peserta diklat.

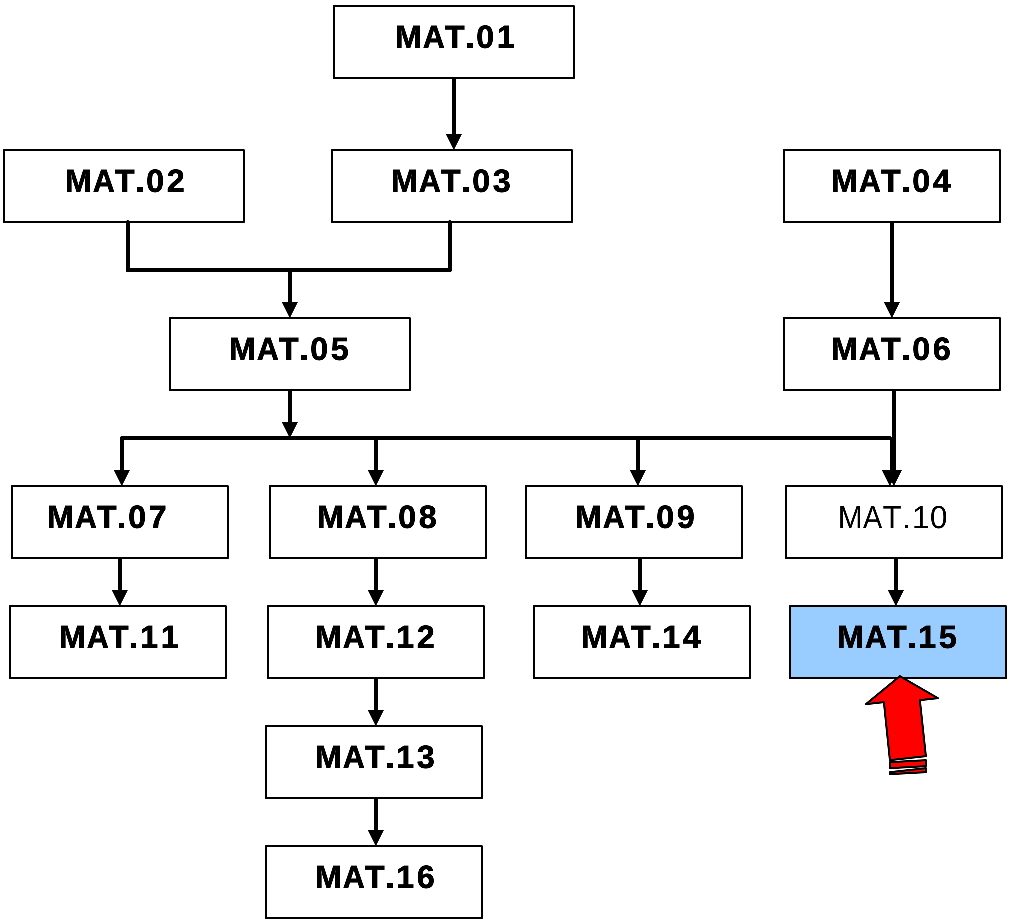
Demikian, semoga modul ini dapat bermanfaat bagi kita semua, khususnya peserta diklat SMK Bidang Adaptif untuk mata pelajaran Matematika, Fisika, Kimia, atau praktisi yang sedang mengembangkan modul pembelajaran untuk SMK.

Jakarta, Desember 2004
a. n. Direktur Jenderal Pendidikan
Dasar dan Menengah
Direktur Pendidikan Menengah Kejuruan,

Dr. Ir. Gatot Hari Priowirjanto, M. Sc.
NIP 130 675 814

DAFTAR ISI

PETA KEDUDUKAN MODUL



Daftar Judul Modul

No.	Kode Modul	Judul Modul
1	MAT.01	Matrik
2	MAT.02	Logika Matematika
3	MAT.03	Persamaan dan Pertidaksamaan
4	MAT.04	Geometri Dimensi Dua
5	MAT.05	Relasi Dan Fungsi
6	MAT.06	Geometri Dimensi Tiga
7	MAT.07	Peluang
8	MAT.08	Bilangan Real
9	MAT.09	Trigonometri
10	MAT.10	Irisan Kerucut
11	MAT.11	Statistika
12	MAT.12	Barisan
13	MAT.13	Aproksimasi Kesalahan
14	MAT.14	ProgramLinier
15	MAT.15	Vektor
16	MAT.16	Matematika Keuangan

Glossary

ISTILAH	KETERANGAN
Besaran vektor	Besaran vektor adalah besaran yang mempunyai besar dan arah. Vektor dapat dinyatakan sebagai segmen garis berarah, di mana panjang segmen menyatakan besar vektor dan arah anak panah menyatakan arah vektor.
Vektor pada bidang koordinat Cartesius	Vektor pada bidang koordinat Cartesius mempunyai dua komponen, yaitu komponen horisontal (sejajar sumbu X) dan komponen vertikal (sejajar sumbu Y). Jika diberikan komponen-komponen suatu vektor maka vektor tersebut dapat digambar dan dapat ditentukan besarnya.
Modulus vektor	Adalah besar dari vektor yang merupakan panjang segmen garis berarah yang menyatakan vektor tersebut. Modulus vektor $\underline{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dinyatakan $\lvert\underline{u}\rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Vektor posisi	Adalah vektor dengan pangkal di titik O(0,0). Dua vektor dikatakan sama jika kedua vektor tersebut mempunyai besar (modulus) dan arah yang sama.
Vektor negatif	Vektor yang besarnya sama dengan $\underline{u}$ tetapi arahnya berlawanan dengan $\underline{u}$ dikatakan vektor negatif $\underline{u}$ dan dilambangkan $-\underline{u}$.
Vektor nol	Vektor nol adalah vektor yang besarnya nol dan tidak mempunyai arah. Vektor satuan adalah vektor yang besarnya 1.
Aturan segitiga	Yaitu menghimpitkan ujung vektor pertama dengan pangkal vektor kedua, hasilnya adalah vektor dengan pangkal vektor pertama dan ujung vektor kedua.
Aturan jajaran genjang	Yaitu dengan menghimpitkan pangkal kedua vektor $\underline{u}_1$ dan $\underline{u}_2$. Jumlah atau resultan kedua vektor adalah diagonal jajargenjang yang sisi-sisinya adalah $\underline{u}_1$ dan $\underline{u}_2$.
Modulus vektor pada bagun ruang	Yaitu besar dari vektor yang merupakan panjang segmen garis berarah yang menyatakan vektor tersebut. Modulus vektor $\underline{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dinyatakan dengan $\lvert\underline{u}\rvert = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
Vektor posisi	Adalah vektor yang menyatakan kedudukan setiap titik di ruang koordinat Cartesius. Vektor posisi berpangkal di titik O(0,0,0) dan berujung di titik pada ruang koordinat.

Vektor nol	Vektor nol adalah vektor yang besarnya nol dan tidak mempunyai arah.
Vektor satuan	Vektor satuan adalah vektor yang besarnya 1. Vektor satuan yang searah dengan suatu vektor $\underline{v}$ ditentukan dengan rumus $\frac{\underline{v}}{\lvert\underline{v}\rvert}$.
Hasil kali dua vektor	Hasil kali vektor $\underline{u}$ dengan skalar n akan menghasilkan vektor yang besarnya n kali besar $\underline{u}$ dan arah sama dengan $\underline{u}$.
Selisih dua vektor	Adalah menjumlahkan vektor pertama dengan lawan (negatif) vektor kedua. Dengan demikian $\underline{a} - \underline{b} = \underline{a} + (-\underline{b})$.
Penjumlahan dua vektor	Penjumlahan dua vektor pada bangun ruang prinsipnya sama dengan penjumlahan dua vektor pada bidang datar.

BAB I. PENDAHULUAN

A. Deskripsi

Modul tentang vektor ini terdiri atas dua bagian proses pembelajaran yang meliputi dua sub kompetensi, yaitu:

1. **Menerapkan konsep vektor pada bidang datar**, yang terdiri dari tiga Kegiatan Belajar. Kegiatan Belajar 1 membahas tentang pengertian vektor, yang meliputi definisi dan notasi vektor. Kegiatan Belajar 2 tentang lingkup vektor pada bidang datar, yang meliputi modulus vektor, kesamaan dua vektor, vektor negatif, vektor nol, vektor satuan. Kegiatan Belajar 3 membahas tentang operasi vektor yang meliputi perkalian vektor dengan skalar, penjumlahan vektor dan selisih dua vektor. Pembelajaran untuk konsep vektor pada bidang datar dialokasikan 13 jam pelajaran.
2. **Menerapkan konsep vektor pada bangun ruang**, yang terdiri dari dua Kegiatan Belajar. Kegiatan Belajar 4 membahas tentang lingkup vektor pada bangun ruang, yang meliputi modulus vektor, vektor posisi, kesamaan dua vektor, vektor negatif, vektor nol, dan vektor satuan. Kegiatan Belajar 5 membahas tentang operasi vektor pada bangun ruang yang meliputi perkalian vektor dengan skalar, penjumlahan vektor, selisih dua vektor. Dan perkalian skalar dua vektor. Pembelajaran untuk konsep vektor pada bangun ruang dialokasikan 10 jam pelajaran.

Pendekatan yang digunakan dalam menyelesaikan modul ini menggunakan pendekatan kontekstual, di mana guru merancang materi pembelajaran yang mengaitkan sebanyak-banyaknya dengan situasi nyata. Diharapkan anda berperan aktif dalam mengkonstruksi konsep, baik secara mandiri maupun bersama-sama.

B. Prasyarat

Untuk mempelajari modul ini Anda disyaratkan telah mempelajari dan menguasai modul tentang Geometri Dimensi Tiga.

C. Petunjuk Penggunaan Modul

Untuk mempelajari modul ini, hal-hal yang perlu Anda lakukan adalah sebagai berikut:

1. Pelajari daftar isi serta skema modul dengan cermat, karena daftar isi dan peta kedudukan modul ini akan menuntun anda dalam mempelajari modul ini dan kaitannya dengan modul-modul yang lain.
2. Untuk mempelajari modul ini haruslah berurutan, karena materi yang mendahului merupakan prasyarat untuk mempelajari materi berikutnya.
3. Pahamilah contoh-contoh soal yang ada, dan kerjakanlah semua soal tes formatif yang ada. Jika dalam mengerjakan soal anda menemui kesulitan, kembalilah mempelajari materi yang terkait.
4. Kerjakan soal evaluasi dengan cermat. Jika anda menemui kesulitan, kembalilah mempelajari materi yang terkait.
5. Jika anda mempunyai kesulitan yang tidak dapat anda pecahkan, catatlah, kemudian tanyakan kepada guru pada saat kegiatan tatap muka atau bacalah referensi lain yang berhubungan dengan materi modul ini. Dengan membaca referensi lain, anda juga akan mendapat pengetahuan tambahan.

D. Tujuan Akhir

Setelah mempelajari modul ini, kompetensi yang diharapkan adalah anda dapat menerapkan konsep vektor dalam memecahkan permasalahan yang berhubungan dengan penggunaan vektor.

Secara lebih rinci setelah telah mempelajari modul ini diharapkan anda dapat:

1. Menggambarkan vektor sebagai segmen garis berarah bila diberikan komponen-komponennya.
2. Menghitung modulus vektor bila diberikan suatu vektor.
3. Menentukan vektor posisi suatu vektor.
4. Menyatakan bahwa dua vektor sama dengan gambar.
5. Menyatakan bahwa dua vektor sama dengan memperhatikan komponen-komponennya.
6. Menentukan negatif dari suatu vektor.
7. Menggunakan pengertian vektor nol dalam operasi vektor.
8. Menyatakan vektor satuan yang searah dengan suatu vektor yang diberikan.
9. Menentukan hasil kali suatu vektor dengan skalar.
10. Menentukan hasil penjumlahan vektor-vektor.
11. Menentukan selisih dua vektor.
12. Menentukan perkalian skalar dua vektor.

E. Kompetensi

KOMPETENSI : VEKTOR
PROGRAM KEAHLIAN : Program Adaptif
KODE : MATEMATIKA/MAT 05
DURASI PEMBELAJARAN : 25 Jam @ 45 menit

SUB KOMPETENSI	KRITERIA KINERJA	LINGKUP BELAJAR	MATERI POKOK PEMBELAJARAN		
			SIKAP	**PENGETAHUAN**	**KETERAMPILAN**
1. Menerapkan konsep vektor pada bidang datar	✍ Konsep vektor dan ruang lingkup vektor dideskripsikan menurut ciri-cirinya ✍ Operasi pada vektor diselesaikan dengan rumus yang sesuai	✍ Pengertian vektor ✍ Lingkup vektor ✍ Operasi vektor	✍ Teliti dan cermat dalam menyelesaikan masalah vektor	✍ Pengertian Vektor ✍ Lingkup vektor - Modulus vektor - Vektor posisi - Kesamaan dua vektor - Vektor negatif - Vektor nol - Vektor satuan ✍ Operasi pada Vektor - Perkalian vektor dengan skalar - Penjumlahan vektor - Selisih dua vektor	✍ Mengoperasikan dan menggambar vektor dengan rumus yang sesuai
2. Menerapkan konsep vektor pada bangun ruang	✍ Operasi vektor pada bangun ruang diselesaikan dengan rumus yang sesuai	✍ Lingkup vektor ✍ Operasi vektor	✍ Teliti dan cermat dalam menyelesaikan masalah vektor	✍ Lingkup vektor - Modulus vektor - Vektor posisi - Kesamaan dua vektor - Vektor negatif - Vektor nol - Vektor satuan ✍ Operasi pada Vektor - Perkalian vektor dengan skalar - Penjumlahan vektor - Selisih dua vektor - Perkalian skalar dua vektor	

F. Cek Kemampuan

Kerjakanlah soal-soal berikut ini. Apabila Anda merasa dapat mengerjakan semua soal dengan benar, maka Anda dapat langsung mengerjakan soal-soal evaluasi pada Bab III.

1. Jelaskan apa yang dimaksud dengan vektor.
2. Bagaimanakah cara menentukan modulus suatu vektor?
3. Bagaimanakah cara menentukan vektor posisi suatu vektor?
4. Pada kondisi yang bagaimana dua buah vektor dikatakan sama?
5. Bisakah Anda menentukan negatif dari suatu vektor?
6. Bagaimanakah sifat vektor nol dalam operasi vektor?
7. Apakah yang dimaksud dengan vektor satuan?
8. Apa yang Anda peroleh apabila suatu vektor dikalikan dengan skalar?
9. Bagaimanakah cara menjumlah atau mengurangi dua buah vektor?
10. Bagaimanakah cara menghitung perkalian skalar dua buah vektor?

BAB II. PEMBELAJARAN

A. RENCANA BELAJAR SISWA

Kompetensi : Menerapkan konsep vektor.

Sub Kompetensi :
- ? Menerapkan konsep vektor pada bidang datar
- ? Menerapkan konsep vektor pada bangun ruang

Tulislah semua jenis kegiatan yang anda lakukan di dalam tabel kegiatan di bawah ini. Jika ada perubahan dari rencana semula, berilah alasannya kemudian mintalah tanda tangan kepada guru atau instruktur anda.

Jenis Kegiatan	Tanggal	Waktu	Tempat Belajar	Alasan perubahan	Tandatangan Guru

B. KEGIATAN BELAJAR

1. Kegiatan Belajar 1: Pengertian Vektor

a. Tujuan Kegiatan Pembelajaran 1

Setelah mempelajari kegiatan belajar ini, diharapkan anda dapat:

- Memberikan contoh besaran fisika yang memiliki besar dan arah.
- Membedakan besaran vektor dengan besaran skalar.
- Mengetahui komponen-komponen dari vektor.
- Dapat menuliskan notasi-notasi vektor.
- Menggambarkan vektor apabila diberikan komponen-komponennya.

b. Uraian Materi 1

1) Pengertian Vektor

Perhatikan papan penunjuk arah pada gambar berikut.

Yogyakarta	? ? ? ? 67km
Solo	? 86km

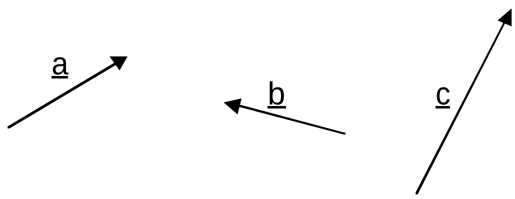
Gambar di samping adalah papan petunjuk bagi pengguna jalan tentang arah dan jarak yang harus ditempuh untuk sampai di kota yang dituju.

Untuk sampai pada kota yang diinginkan pengguna jalan harus mengikuti arah dan menempuh jarak yang ditentukan. Misalnya: Untuk mencapai kota Yogyakarta, Anda harus membelok ke arah kanan dan menempuh jarak sejauh 67 km dari lokasi papan petunjuk tersebut. Dengan demikian ada dua hal yang harus diperhatikan, yaitu arah dan jarak (besar) yang harus ditempuh. Banyak contoh besaran fisika yang memiliki arah dan besar seperti uraian di atas, antara lain: kecepatan, percepatan, gaya, dan sebagainya.

Besaran yang mempunyai arah dan besar biasanya dinyatakan dengan segmen garis berarah. Segmen garis berarah tersebut dinamakan ***vektor***. Panjang segmen garis berarah menyatakan besar vektor, sedangkan arah vektor dinyatakan oleh kemiringan segmen garis dan anak panahnya.

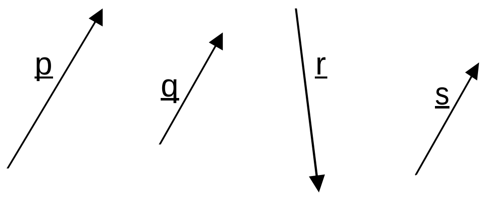
Untuk menyatakan suatu vektor dapat dilakukan pada bidang datar atau bidang koordinat Cartesius XOY dengan menggambar ruas garis dengan anak panah di salah satu ujungnya. Panjang ruas garis mewakili besar (panjang) vektor dan anak panah mewakili arah vektor. Vektor disimbolkan dengan huruf tebal atau dengan huruf yang digaris bawahi. Di modul ini kita menyatakan vektor dengan huruf yang digaris bawahi.

Contoh 1.1:



Pada Contoh 1.1 terdapat vektor $\underline{a}$, $\underline{b}$, dan $\underline{c}$ yang mempunyai arah dan panjang yang berbeda-beda.

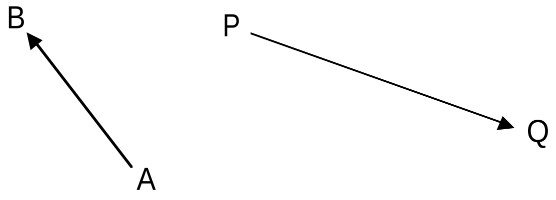
Contoh 1.2:



Pada Contoh 1.2, vektor $\underline{p}$ dan $\underline{q}$ mempunyai arah sama tetapi panjang berbeda, vektor $\underline{p}$ dan $\underline{r}$ mempunyai panjang sama tetapi arah berbeda, sedang vektor $\underline{q}$ dan $\underline{r}$ mempunyai arah dan panjang yang sama.

Vektor juga dapat diberi simbol dengan menyebutkan pangkal dan ujung vektor dengan huruf kapital dan diatasnya diberi tanda panah.

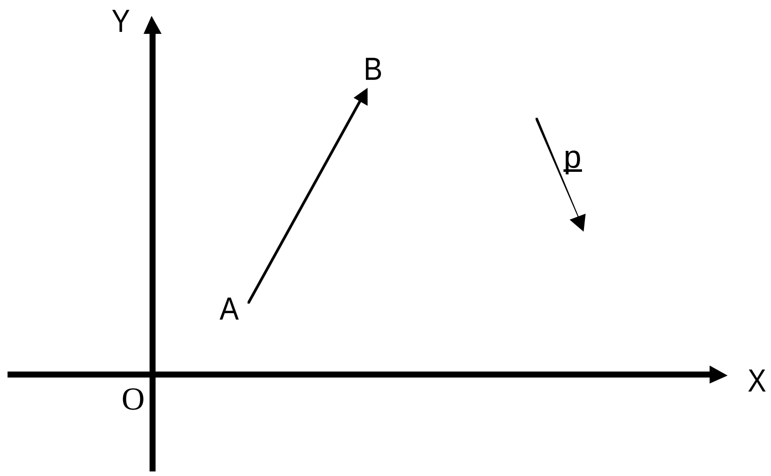
Contoh 1.3:



Pada Contoh 1.3 terdapat vektor $\overrightarrow{AB}$ dan $\vec{PQ}$. Vektor $\overrightarrow{AB}$ mempunyai pangkal titik A dan ujung titik B. Vektor $\vec{PQ}$ mempunyai pangkal titik P dan ujung titik Q.

Vektor juga dapat digambarkan pada bidang koordinat Cartesius.

Contoh 1.4:



2) Komponen Vektor

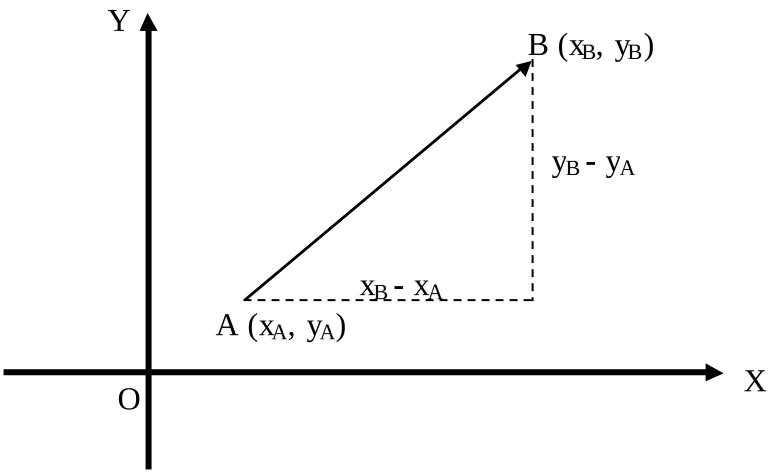
Pernahkah Anda bermain game sepakbola menggunakan *playstation*? Anda akan menggerakkan pemain di layar televisi dengan menggerakkan tombol-tombol ke kanan, kiri, atas, bawah, serong kanan bawah, serong kiri atas dan sebagainya. Untuk memindahkan pemain ke arah kanan atas, Anda dapat melakukannya dengan menekan tombol kanan, diikuti dengan menekan tombol atas atau dengan menekan tombol atas, diikuti dengan menekan tombol kanan.

Cara lain yang lebih cepat adalah dengan menekan tombol kanan dan tombol atas secara bersamaan.

Layar televisi dapat kita umpamakan bidang datar yang dapat digambarkan dengan bidang koordinat Cartesius XOY. Pemain-pemain sepakbola merupakan titik-titik yang dapat dipindahkan pada bidang XOY. Pemain sepakbola dapat berpindah letak ke segala arah dengan cara seperti uraian di atas. Pada prinsipnya setiap perpindahan letak pemain dapat ditentukan oleh dua komponen, yaitu gerakan ke kanan/kiri dan gerakan ke atas/bawah. Perpindahan letak pemain sepakbola itu merupakan suatu vektor.

Vektor yang digambarkan pada bidang koordinat mempunyai komponen horisontal (gerakan ke kanan/kiri) dan komponen vertikal (gerakan ke atas/bawah).

<u>Contoh 1.5:</u>



Komponen horisontal vektor $\overrightarrow{AB}$ sebesar $x_B - x_A$, sedang komponen vertikal vektor $\overrightarrow{AB}$ sebesar $y_B - y_A$.

3) Besaran Vektor

Besaran vektor adalah besaran yang mempunyai besar (panjang) dan arah dan digambarkan sebagai segmen garis berarah. Besar vektor dinyatakan dengan panjang segmen garis berarah. Contoh dari besaran vektor, antara lain: gaya, kecepatan, percepatan, dan sebagainya.

Perhatikan gambar di atas. Besar vektor $\overrightarrow{AB}$ adalah panjang $\overline{AB}$. Berdasarkan Teorema Pythagoras maka panjang $\overline{AB}$ dapat dihitung sebagai berikut:

$\left|\overline{AB}\right|^2$ = (komponen horizontal)^2 + (komponen vertikal)^2

$$\overline{AB} = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}$$

Contoh 1.6:

Jika D(3,-5) dan H(-2,7) maka panjang vektor $\vec{DH}$ adalah

$$|\overline{DH}| = \sqrt{(-2-3)^2 + (7-(-5))^2}$$

$$= \sqrt{(-5)^2 + 12^2}$$

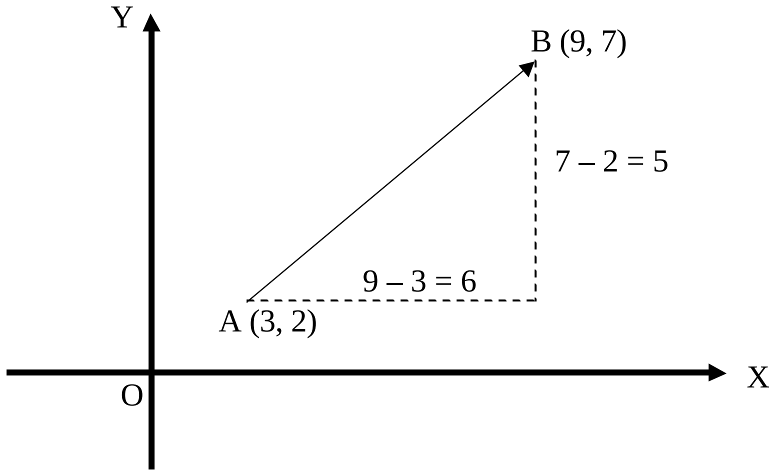
$$= \sqrt{25 + 144}$$

$$= \sqrt{169} = 13$$

4) Notasi Vektor

Karena vektor mempunyai dua komponen yaitu komponen horisontal (sejajar sumbu X) dan komponen vertikal (sejajar sumbu Y) maka setiap vektor dapat dinyatakan dengan notasi $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ di mana *x* komponen horisontal dan *y* komponen vertikal.

Contoh



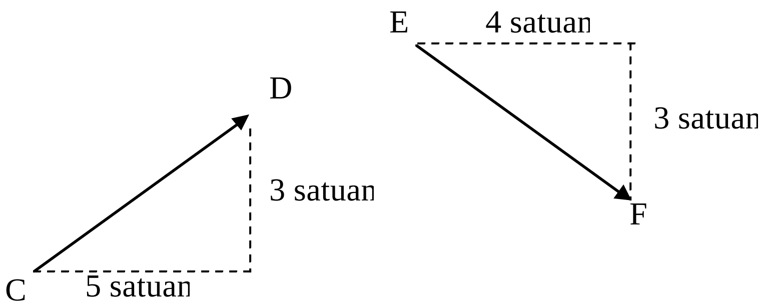
Vektor $\overrightarrow{AB}$ di atas dinotasikan $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$, yang artinya bahwa adalah vektor $\overrightarrow{AB}$ komponen horisontalnya 6 (enam) satuan ke kanan dan komponen vertikalnya 5 (lima) satuan ke atas.

5) Menggambar Vektor

Sebaliknya, jika diberikan komponen-komponen vektor maka kita dapat menggambar vektor yang dimaksud pada bidang datar atau bidang koordinat Cartesius.

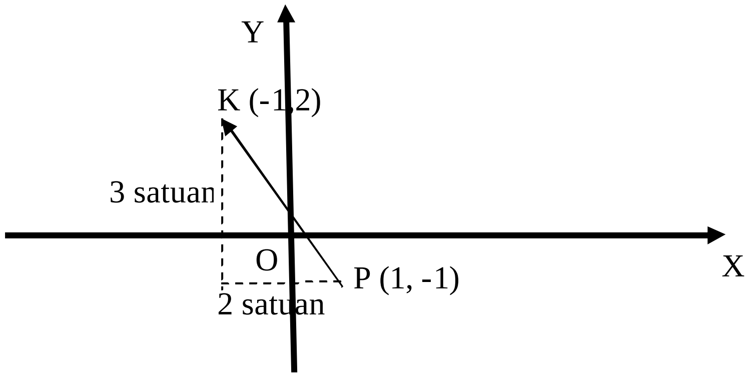
Contoh:

Vektor $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, berarti dari titik C melangkah 5 satuan ke kanan dan 3 satuan ke atas. Vektor $\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, berarti dari titik E melangkah 4 satuan ke kanan dan 3 satuan ke bawah.



Contoh 1.7

Vektor $\overrightarrow{PK} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ dengan P(1,-1), berarti dari titik P melangkah 2 satuan ke kiri dan 3 satuan ke atas, sehingga diperoleh K(-1,2).



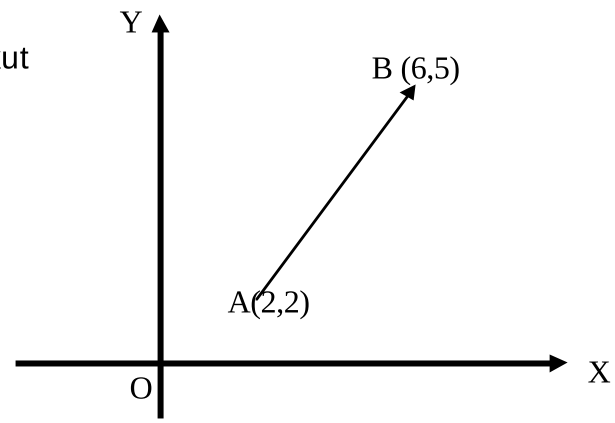
c. Rangkuman 1

Besaran vektor adalah besaran yang mempunyai besar dan arah. Vektor dapat dinyatakan sebagai segmen garis berarah, di mana panjang segmen menyatakan besar vektor dan arah anak panah menyatakan arah vektor.

Vektor pada bidang koordinat Cartesius mempunyai dua komponen, yaitu komponen horisontal (sejajar sumbu X) dan komponen vertikal (sejajar sumbu Y). Jika diberikan komponen-komponen suatu vektor maka vektor tersebut dapat digambar dan dapat ditentukan besarnya.

d. Tugas 1

1) Berdasarkan pengertian vektor, carilah contoh-contoh dalam kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan vektor.
2) Bagaimana jika ada dua vektor yang mempunyai besar dan arah yang sama?
3) Perhatikan gambar berikut



a) Tentukan komponen-komponen vektor $\overrightarrow{AB}$

b) Hitung panjang vektor $\overrightarrow{AB}$

c) Gambar vektor $\overrightarrow{SD}$ yang searah dengan vektor $\overrightarrow{AB}$ tetapi besarnya 1 satuan

d) Gambar vektor $\overrightarrow{NG}$ yang besarnya sama dengan vektor $\overrightarrow{AB}$ tetapi arahnya berbeda

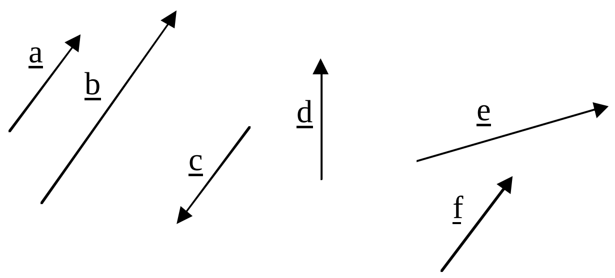
e) Gambar vektor $\overrightarrow{KO}$ yang sama dengan vektor $\overrightarrow{AB}$ dan K(-3,1)

e. Tes Formatif 1

Kerjakanlah soal-soal di bawah ini.

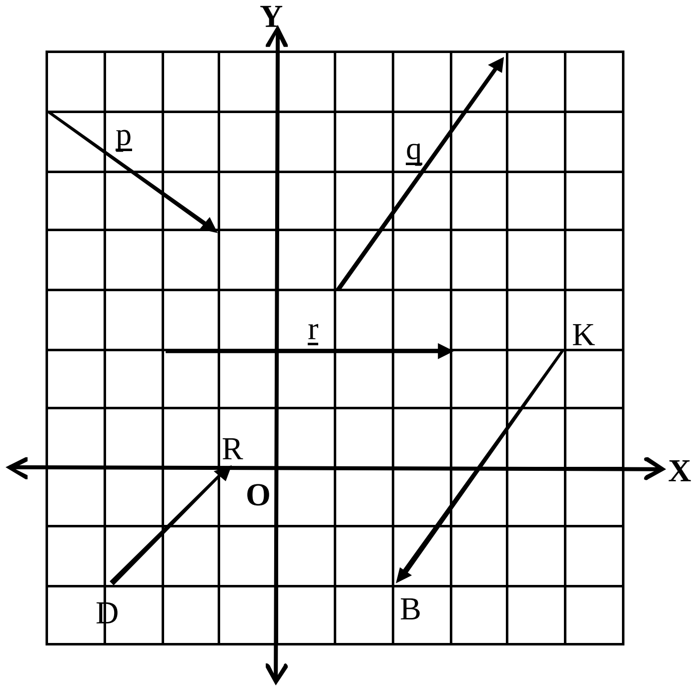
1) Dari besaran-besaran berikut, manakah yang merupakan besaran vektor?
   a) kecepatan sebuah mobil
   b) gerakan jarum jam
   c) lintasan kereta api
   d) arus air di sungai
   e) gaya tarik suatu magnet

2) Perhatikan gambar vektor-vektor berikut:



   Manakah vektor yang
   a) besarnya sama tetapi arahnya berbeda
   b) arahnya sama tetapi besarnya berbeda
   c) besar dan arahnya sama
   d) besar dan arahnya berbeda
   e) searah

3) Tentukan komponen-komponen dari vektor-vektor berikut.



4) Tulislah notasi vektor-vektor di atas.

5) Gambarlah vektor-vektor berikut

a) $\underline{k} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ dengan pangkal di titik (-2,1)

b) $\underline{s} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ dengan ujung di titik (-1,2)

c) $\overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ dengan G(0,4)

d) $\overrightarrow{RP} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ dengan P(2,-1)

e) $\overrightarrow{CS} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ dengan C(3,4)

f. Kunci Jawaban Tes Formatif 1

1) a) kecepatan sebuah mobil

d) arus air di sungai

e) gaya tarik suatu magnet

2) a) vektor $\underline{c}$ dan $\underline{d}$

b) vektor $\underline{b}$

c) vektor $\underline{f}$

d) vektor $\underline{e}$

e) vektor $\underline{b}$ dan $\underline{f}$

3) a) komponen horizontal vektor $\underline{p}$ adalah 3 satuan

komponen vertikal vektor $\underline{p}$ adalah 2 satuan

b) komponen horizontal vektor $\underline{q}$ adalah 3 satuan

komponen vertikal vektor $\underline{q}$ adalah 4 satuan

c) komponen horizontal vektor $\underline{r}$ adalah 5 satuan

komponen vertikal vektor $\underline{r}$ adalah 0 satuan

d) komponen horizontal vektor $\overrightarrow{DR}$ adalah 2 satuan

komponen vertikal vektor $\overrightarrow{DR}$ adalah 2 satuan

e) komponen horizontal vektor $\vec{KB}$ adalah 3 satuan

komponen vertikal vektor $\vec{KB}$ adalah 4 satuan

4) a) $\underline{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ ?\,2 \end{pmatrix}$

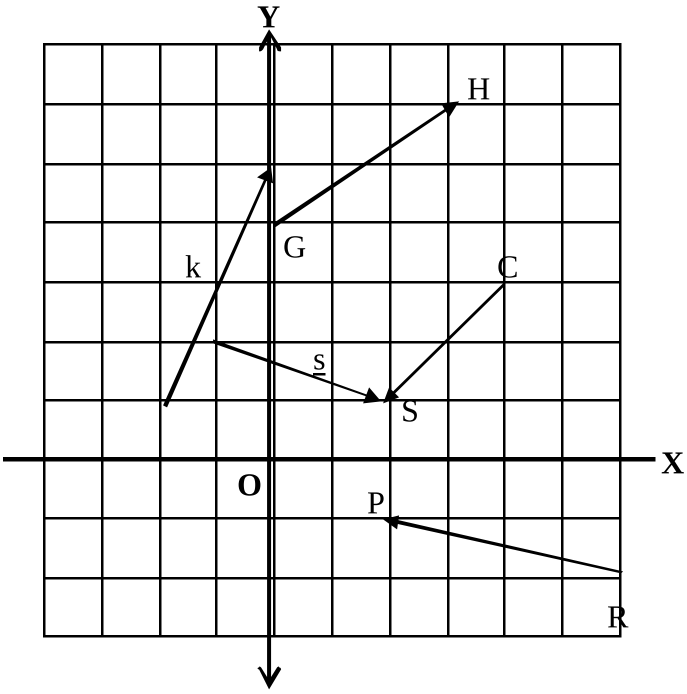
b) $\underline{q} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $\underline{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $\overrightarrow{DR} \;?\; \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

e) $\overrightarrow{KB} \;?\; \begin{pmatrix} ?\,3 \\ ?\,4 \end{pmatrix}$

5)



2. Kegiatan Belajar 2: Lingkup Vektor pada Bidang Datar

a. Tujuan Kegiatan Belajar 2

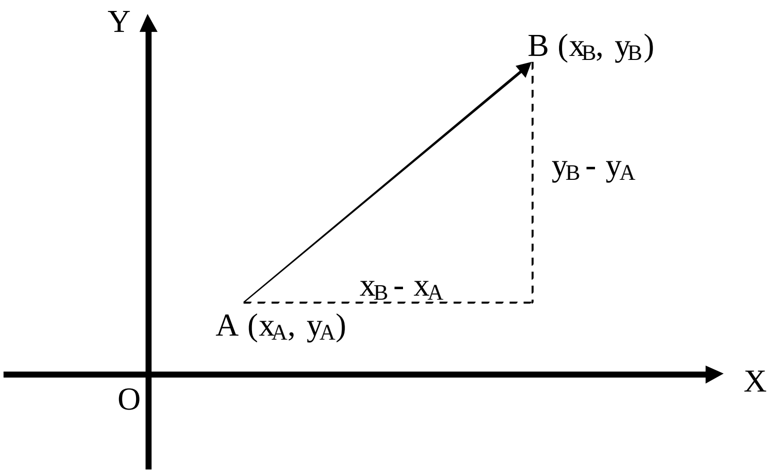
Setelah mempelajari kegiatan belajar 2 ini, diharapkan Anda dapat:

- ✍ menghitung modulus vektor pada bidang datar
- ✍ menentukan vektor posisi suatu vektor pada bidang datar
- ✍ menyatakan bahwa dua vektor sama pada bidang datar
- ✍ menentukan negatif dari suatu vektor pada bidang datar
- ✍ menyatakan pengertian vektor nol pada bidang datar
- ✍ menentukan vektor satuan pada bidang datar

b. Uraian Materi 2

1) Modulus Vektor

Vektor yang digambarkan pada bidang koordinat mempunyai komponen horisontal (searah sumbu X) dan komponen vertikal (searah sumbu Y). Perhatikan gambar di bawah ini.



Komponen vektor $\overrightarrow{AB}$ yang horisontal sebesar $x_B - x_A$, sedang komponen vektor $\overrightarrow{AB}$ yang vertikal sebesar $y_B - y_A$.

Besar vektor $\overrightarrow{AB}$ adalah panjang $\overline{AB}$ dan disebut modulus vektor $\overrightarrow{AB}$. Berdasarkan Teorema Pythagoras maka panjang $\overline{AB}$ dapat dihitung sebagai: $\left|\overline{AB}\right|^2$ = (komponen horisontal)^2 + (komponen vertikal)^2 , atau

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}$$

Contoh 2.1:

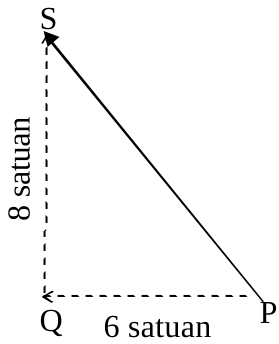
Jika diketahui D(3,-5) dan H(-2,7) maka modulus vektor $\overrightarrow{DH}$ adalah

$$\begin{aligned}
|\overline{DH}| &= \sqrt{(-2-3)^2 + (7-(-5))^2} \\
&= \sqrt{(-5)^2 + 12^2} \\
&= \sqrt{25 + 144} \\
&= \sqrt{169} \\
&= 13
\end{aligned}$$

Jadi modulus vektor $\overrightarrow{DH}$ adalah 13 satuan.

Contoh 2.2:

Vektor $\overrightarrow{PS}$ = $\begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix}$ dapat digambar dari titik pangkal P ke kiri 6 satuan dan ke atas 8 satuan seperti berikut:



Karena PQS merupakan segitiga siku-siku di Q, maka berdasarkan Teorema Pythagoras berlaku:

$$\overline{PS}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{QS}^2$$

$$= 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$$

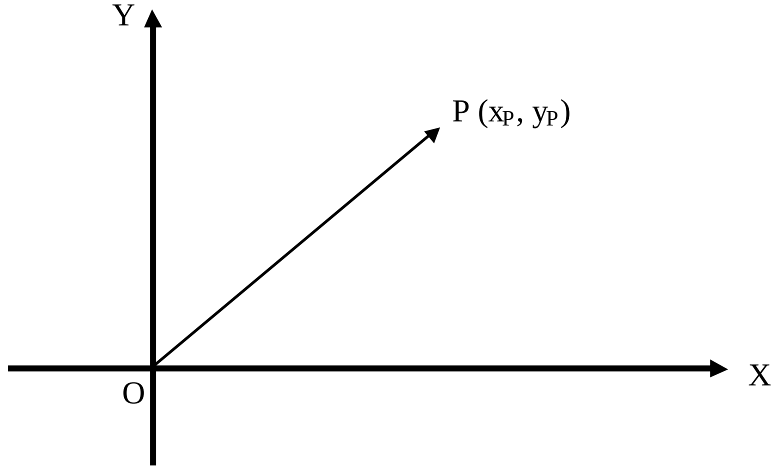
$$|\overline{PS}| = 10$$

Jadi modulus vektor $\overrightarrow{PS}$ = $\begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix}$ adalah 10 satuan.

2) Vektor Posisi

Pada bidang koordinat Cartesius, setiap titik P pada bidang dapat dinyatakan sebagai vektor $\overrightarrow{OP}$. Vektor $\overrightarrow{OP}$ disebut *vektor* posisi dari titik P. Koordinat titik P merupakan komponen-komponen dari vektor $\overrightarrow{OP}$.

<u>Contoh 2.3:</u>

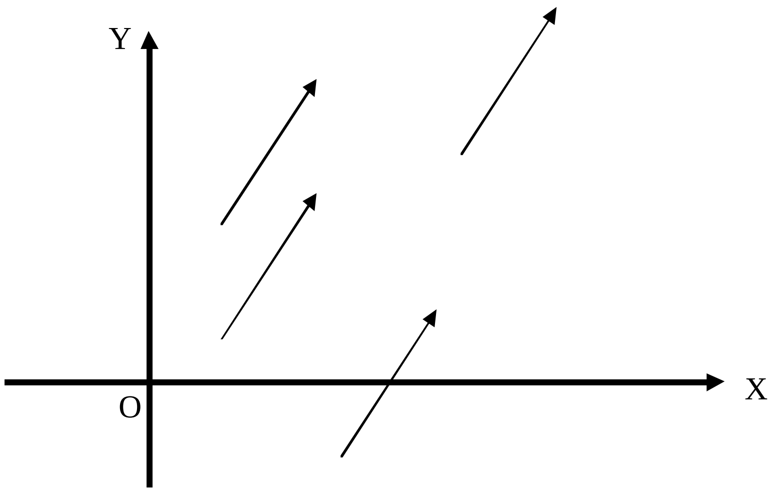


Pada contoh di atas vektor posisi OP mempunyai komponen horisontal x_P dan komponen vertikal y_P.

3) Kesamaan Dua Vektor

Dua vektor dikatakan sama jika kedua vektor tersebut mempunyai besar dan arah yang sama.

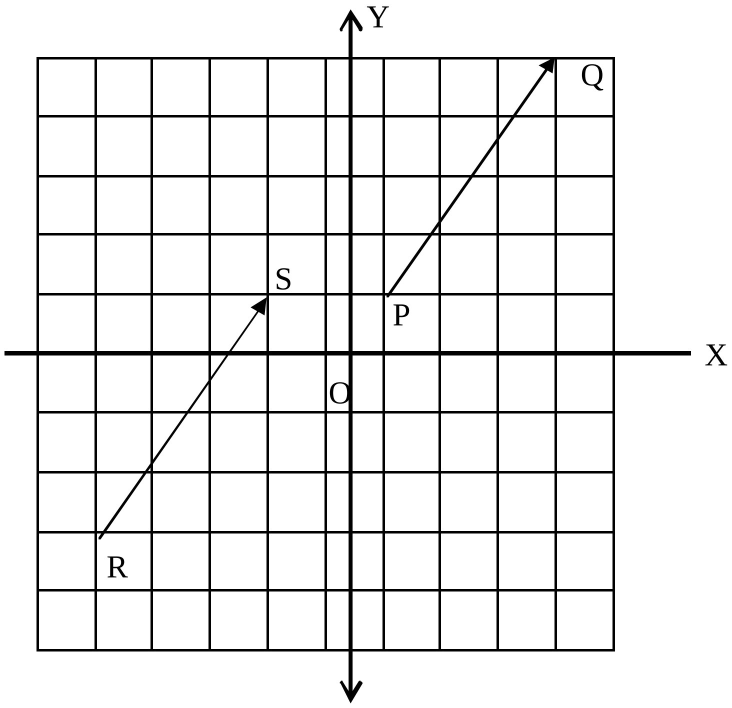
Perhatikan gambar berikut.



Keempat vektor pada gambar di atas adalah sama karena mempunyai besar dan arah yang sama.

<u>Contoh 2.4:</u>

Diketahui vektor titik-titik P(1,1), Q(4,5), R(-4,-3), S(-1,1).

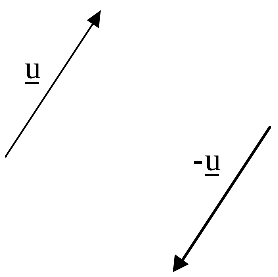


$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$, karena $\overrightarrow{PQ}$ searah dengan $\overrightarrow{RS}$ dan $|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{RS}|$.

4) Vektor Negatif

Vektor yang besarnya sama dengan vektor <u>u</u> tetapi arahnya berlawanan disebut vektor negatif dari <u>u</u> dan ditulis sebagai -<u>u</u>.

<u>Contoh 2.5:</u>



Jelas bahwa jika komponen vektor <u>u</u> = $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, maka komponen

$-\underline{u} = \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$.

5) Vektor Nol

Yang dimaksud dengan vektor nol adalah vektor yang besarnya nol atau tidak mempunyai panjang (berupa titik). Vektor nol tidak mempunyai arah tertentu. Vektor nol dilambangkan dengan $\underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Pada koordinat bidang Cartesius, vektor nol adalah titik O(0,0).

6) Vektor Satuan

Vektor yang mempunyai panjang (modulus) 1 satuan disebut *vektor satuan*.

Contoh 2.6:

Vektor $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ adalah vektor satuan karena modulus $\underline{a}$ = $\sqrt{1^2 + 0^2}$ =1.

Vektor $\underline{b} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$ adalah vektor satuan

karena modulus $\underline{b}$ = $\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(-\frac{4}{5}\right)^2}$ = $\sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}}$ = 1.

Kita dapat menentukan vektor satuan yang searah dengan vektor $\underline{v}$ menurut rumus berikut: $\dfrac{\underline{v}}{|\underline{v}|}$

Contoh 2.7:

Diketahui vektor $\underline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vektor satuan yang searah dengan vektor $\underline{c}$

adalah vektor $\frac{\underline{c}}{|\underline{c}|}$. Karena $|\underline{c}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, maka vektor satuannya adalah $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Dapat ditunjukkan vektor yang diperoleh mempunyai modulus 1.

c. Rangkuman 2

Modulus vektor adalah besar dari vektor yang merupakan panjang segmen garis berarah yang menyatakan vektor tersebut.

Modulus vektor $\underline{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dinyatakan $|\underline{u}| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Vektor posisi adalah vektor dengan pangkal di titik O(0,0).

Dua vektor dikatakan sama jika kedua vektor tersebut mempunyai besar (modulus) dan arah yang sama.

Vektor yang besarnya sama dengan $\underline{u}$ tetapi arahnya berlawanan dengan $\underline{u}$ dikatakan vektor negatif $\underline{u}$ dan dilambangkan $-\underline{u}$.

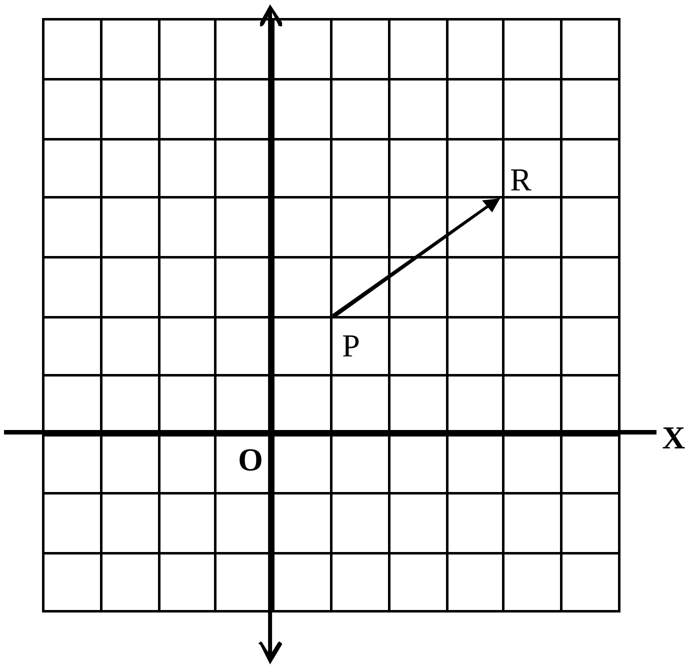
Vektor nol adalah vektor yang besarnya nol dan tidak mempunyai arah.

Vektor satuan adalah vektor yang besarnya 1.

d. Tugas 2

1) Diskusikan pernyataan-pernyataan berikut:
   a) Vektor nol merupakan vektor posisi
   b) Modulus dari suatu vektor sama dengan modulus vektor negatifnya
   c) Vektor satuan merupakan vektor posisi
   d) Vektor satuan dari suatu vektor selalu sejajar dengan vektor yang diberikan tersebut.

2) Perhatikan gambar berikut.



Gambarlah vektor yang

a) sama dengan vektor $\overrightarrow{PR}$

b) negatif dari vektor $\overrightarrow{PR}$

c) vektor satuan dari vektor $\overrightarrow{PR}$

d) vektor nol

e) vektor posisi yang sama dengan $\overrightarrow{PR}$

3) Jika $\underline{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ tentukan:

   a) modulus dari $\underline{d}$
   b) negatif dari d
   c) vektor satuan dari d

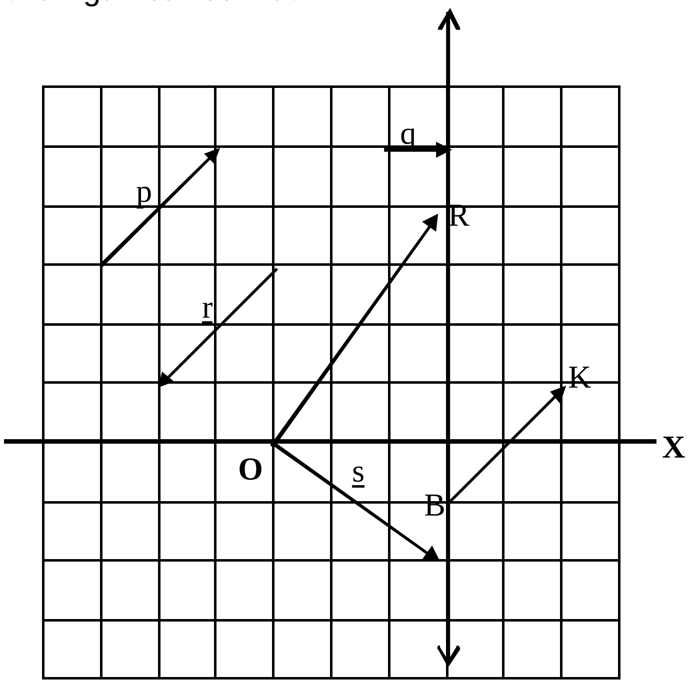
e. Tes Formatif 2

1) Tentukan modulus dari vektor-vektor berikut

   a) $\underline{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

   b) $\overrightarrow{AN}$ dengan A(-2,3) dan N(1,-4)

2) Perhatikan gambar berikut.



Vektor mana yang

a) merupakan vektor posisi
b) sama dengan vektor $\underline{p}$
c) negatif dari vektor $\underline{p}$
d) vektor satuan
e) vektor nol

3) Tentukan vektor $\overrightarrow{TV}$ yang sama dengan vektor $\underline{p}$ = $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ dengan pangkal titik T(3,-5).

4) Dari vektor-vektor berikut, tentukan vektor satuannya.

a) $\underline{s}$ = $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\underline{w}$ = $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\overrightarrow{RP}$ dengan R(3,-2) dan P(2,-2)

f. Kunci Tes Formatif 2

1) a) $\underline{d}$ = $\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

$|\underline{d}|$ = $\sqrt{4^2 + (-5)^2}$ = $\sqrt{16 + 25}$ = $\sqrt{41}$ = 6,403.

b) $\vec{AN}$ dengan A(-2,3) dan N(1,-4)

$|\vec{AN}|$ = $\sqrt{(1 ? (?2))^2 ? (?4 ? 3)^2} ? \sqrt{3^2 ? (?7)^2} ? \sqrt{9 ? 49} ? \sqrt{58}$ =7,616

2) a) $\overrightarrow{OR}$ dan s

b) $\overrightarrow{BK}$

c) r

d) q

e) 0

3) Karena vektor p = $\begin{pmatrix} ?2 \\ 3 \end{pmatrix}$ maka dari titik T(3,-5) ke kiri 2 satuan dan ke atas 3 satuan. Maka V(1, 2)

4) a) s = $\begin{pmatrix} 0 \\ ?1 \end{pmatrix}$ karena $\sqrt{0^2 ? (?1)^2} ? \sqrt{0 ? 1} ? \sqrt{1} ? 1$

b) $\frac{\underline{w}}{|\underline{w}|} ? \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

c) $\vec{RP}$ = $\begin{pmatrix} ?1 \\ 0 \end{pmatrix}$ karena

$\sqrt{(2 ? 3)^2 ? (?2 ? (?2))^2} ? \sqrt{(?1)^2 ? 0^2} ? \sqrt{1 ? 0} ? \sqrt{1} ? 1$

3. Kegiatan Belajar 3: Operasi Vektor

a. Tujuan Kegiatan Belajar 3

Setelah mempelajari kegiatan belajar 3 ini, diharapkan Anda dapat:

- menentukan hasil kali suatu vektor dengan skalar
- menentukan hasil penjumlahan vektor-vektor
- menentukan selisih dua vektor

b. Uraian Materi 3

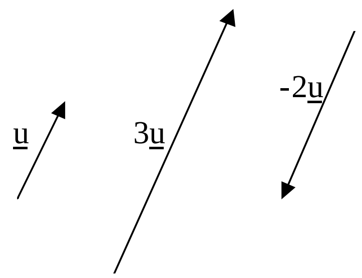
1) Hasil Kali Vektor dengan Skalar

Pada lembar kegiatan belajar 1 anda telah mengenal besaran vektor, yaitu besaran yang memiliki besar (panjang) dan arah. Selain itu, ada besaran fisika lain yang hanya memiliki besar, misalnya: jarak, waktu, massa, dan sebagainya. Besaran yang hanya memiliki besar disebut ***besaran skalar***. Adapun bilangan yang kita gunakan untuk mengukur besaran skalar disebut ***skalar.***

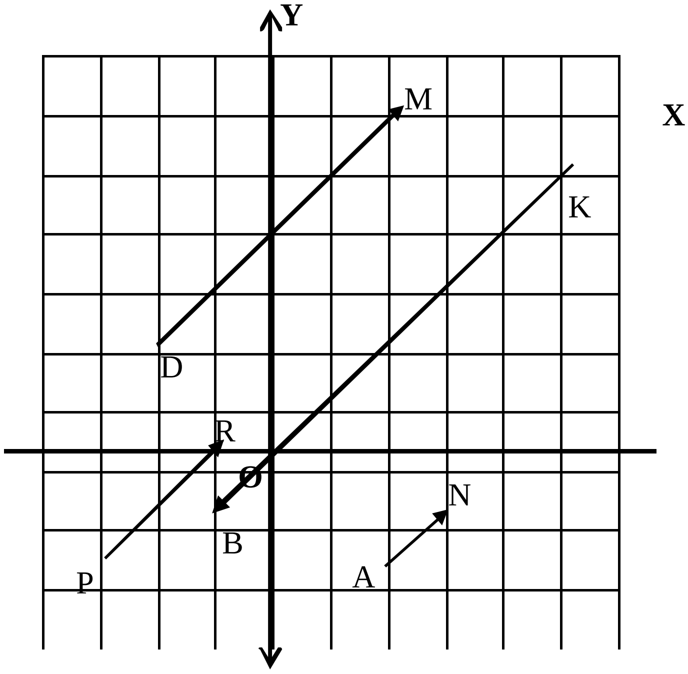
Vektor dapat dioperasikan dengan skalar. Karena skalar hanya mempunyai besar maka perkalian vektor dengan skalar hanya akan berpengaruh pada besar vektor saja, sedangkan arahnya tetap.

Hasil kali vektor $\underline{u}$ dengan skalar 2 akan menghasilkan vektor dengan besar 2 kalinya sedangkan arahnya tetap. Secara umum, hasil kali vektor $\underline{u}$ dengan skalar n akan menghasilkan vektor $n\underline{u}$ yang besarnya n kali besar $\underline{u}$ dan arahnya sama dengan $\underline{u}$ bila n positif, dan berlawanan arah $\underline{u}$ bila n negatif.

<u>Contoh 3.1:</u>



Contoh 3.2:



Pada gambar di samping

a) $\overrightarrow{DM} = 2\ \overrightarrow{PR}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{KB} = -3\ \overrightarrow{PR}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

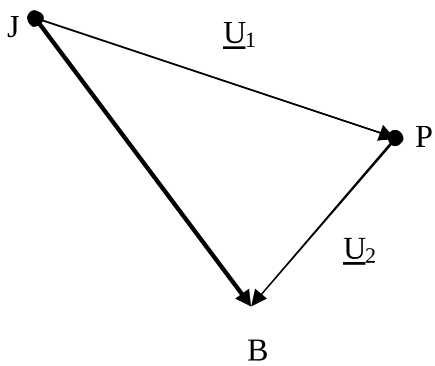
c) $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{PR}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Secara umum, jika $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ maka $n\underline{a} = \begin{pmatrix} n.a_1 \\ n.a_2 \end{pmatrix}$.

2) Penjumlahan Vektor

Dari Jakarta, Pak Bajuri akan pergi ke Bandung. Jika naik kereta api dia harus melalui Purwakarta dahulu, kemudian ke Bandung. Tetapi jika Pak Bajuri naik pesawat, dia dapat terbang langsung dari Jakarta ke Bandung. Rute perjalanan Pak Bajuri ini dapat digambarkan dalam bentuk vektor sebagai berikut, dengan J mewakili Jakarta, P mewakili Purwakarta dan B mewakili Bandung.

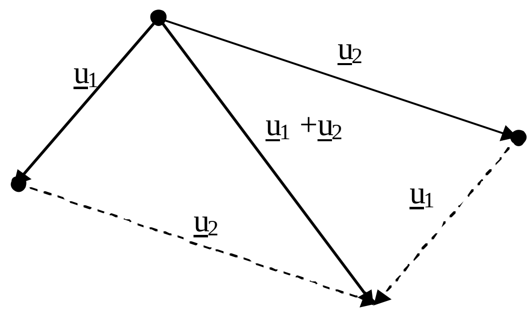


Dari gambar di atas, rute Jakarta-Purwakarta diwakili oleh vektor $\underline{u}_1$ dan dilanjutkan dengan rute Purwakarta-Bandung yang diwakili oleh vektor $\underline{u}_2$. Hasil dari gabungan ke dua rute tersebut sama saja dengan rute penerbangan pak Bajuri Jakarta-Bandung, yang diwakili oleh vektor $\vec{JB}$.

Masalah di atas merupakan masalah penjumlahan dua vektor atau resultante dari dua vektor.

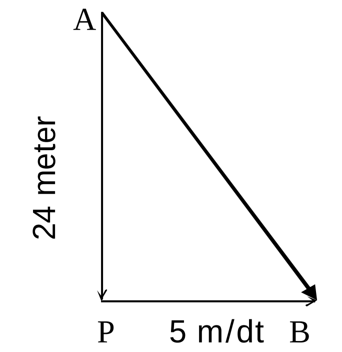
Untuk menggambar jumlah dua vektor, dapat dilakukan dengan cara seperti di atas, yaitu menghimpitkan ujung vektor pertama dengan pangkal vektor kedua, hasilnya adalah vektor dengan pangkal vektor pertama dan ujung vektor kedua. Cara ini disebut *aturan segitiga*.

Selain itu dapat juga dilakukan dengan menghimpitkan pangkal kedua vektor $\underline{u}_1$ dan $\underline{u}_2$. Jumlah atau resultan kedua vektor adalah diagonal jajargenjang yang sisi-sisinya adalah $\underline{u}_1$ dan $\underline{u}_2$. Cara ini disebut *aturan jajargenjang*. Perhatikan gambar berikut.



Contoh 3.3:

Sebuah perahu akan digunakan untuk menyeberangi sungai yang lebarnya 24 meter. Sungai itu mempunyai kecepatan arus 5 meter/detik. Arah perjalanan perahu tersebut dapat digambarkan sebagai berikut.

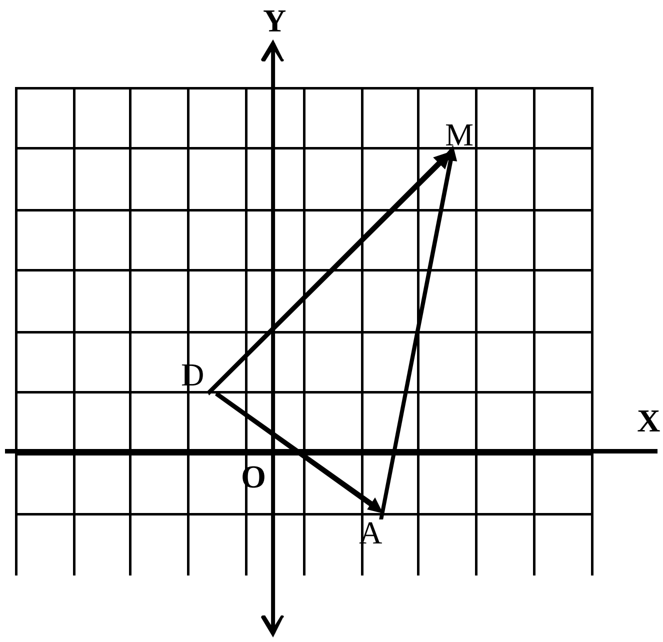


$\vec{AP}$ menyatakan arah dan jarak yang ingin ditempuh perahu,

$\vec{PB}$ menyatakan kecepatan arus

$\vec{AB} = \vec{AP} + \vec{PB}$ menyatakan arah dan jarak perjalanan perahu.

Pada bidang koordinat Cartesius, penjumlahan dua vektor lebih mudah menggunakan *aturan segitiga*.



Pada gambar di samping

$\vec{DA} + \vec{AM} = \vec{DM}$

$\vec{DA} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\vec{AM} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\vec{DM} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

Perhatikan

$\vec{DA} + \vec{AM} = \vec{DM}$

Perhatikan, untuk menentukan komponen horisontal dan vertikal dari vektor hasil penjumlahan diperoleh dari menjumlahkan masing-masing komponen.

Secara umum, jika $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ dan $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

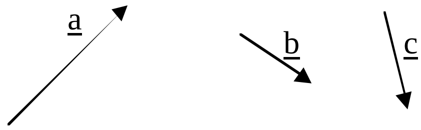
maka $\underline{a} + \underline{b} = \begin{pmatrix} a1 + b1 \\ a2 + b2 \end{pmatrix}$

Contoh 3.4:

Jika $\underline{p} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ dan $\underline{q} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ maka $\underline{p} + \underline{q} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

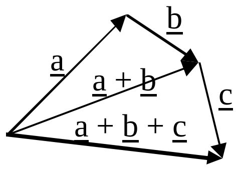
Contoh 3.5:

Diketahui vektor a, b dan c sebagai berikut

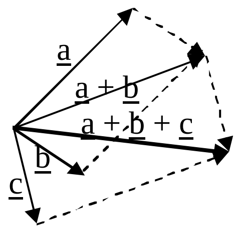


Tentukan resultante dari vektor a, b dan c tersebut.

Resultante dari vektor a, b dan c dapat ditentukan dengan menggunakan aturan segitiga atau aturan jajargenjang.



atau



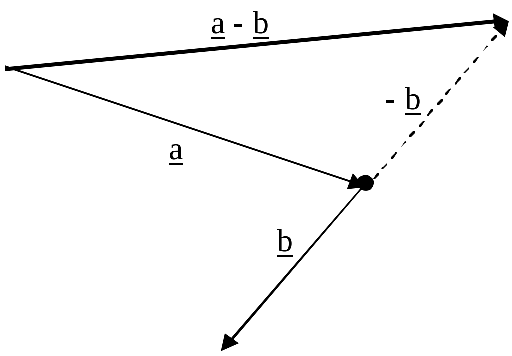
dengan aturan segitiga dengan aturan jajargenjang

3) Selisih Dua Vektor

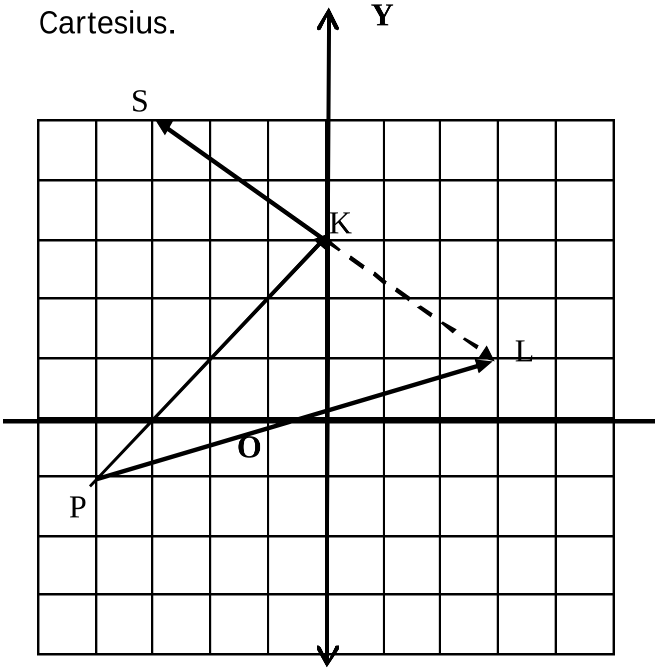
Selisih atau pengurangan adalah lawan dari penjumlahan. Menghitung selisih dua vektor sama artinya dengan menjumlahkan vektor pertama dengan lawan (negatif) vektor kedua. Dengan demikian

$$\underline{a} - \underline{b} = \underline{a} + (-\underline{b})$$

Perhatikan gambar berikut:



Selisih dua vektor juga dapat digambarkan pada bidang koordinat Cartesius.



Pada gambar di samping

$\overrightarrow{KL} = -\overrightarrow{KS}$

Sehingga

$\overrightarrow{PK} - \overrightarrow{KS} = \overrightarrow{PK} + \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{PL}$

$\overrightarrow{PK} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{KS} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{PL} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$

Perhatikan, untuk menentukan komponen horisontal dan vertikal dari selisih dua vektor diperoleh dari selisih masing-masing komponen.

Secara umum, jika $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ dan $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

$$\text{maka } \underline{a} - \underline{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}$$

<u>Contoh 3.6:</u>

Jika $\underline{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan $\underline{q} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ maka $\underline{p} - \underline{q} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}$

c. Rangkuman 3

Hasil kali vektor <u>u</u> dengan skalar n akan menghasilkan vektor yang besarnya n kali besar <u>u</u> dan arah sama dengan <u>u</u>.

Untuk menggambar jumlah dua vektor, dapat dilakukan dengan cara

1) *aturan segitiga*, yaitu menghimpitkan ujung vektor pertama dengan pangkal vektor kedua, hasilnya adalah vektor dengan pangkal vektor pertama dan ujung vektor kedua.
2) *aturan jajargenjang*, yaitu dengan menghimpitkan pangkal kedua vektor $\underline{u}_1$ dan $\underline{u}_2$. Jumlah atau resultan kedua vektor adalah diagonal jajargenjang yang sisi-sisinya adalah $\underline{u}_1$ dan $\underline{u}_2$.

   Selisih dua vektor berarti menjumlahkan vektor pertama dengan lawan (negatif) vektor kedua. Dengan demikian $\underline{a} - \underline{b} = \underline{a} + (-\underline{b})$.

   Pada bidang koordinat Cartesius jika $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ dan $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ maka

   a) $n\underline{a} = \begin{pmatrix} n.a_1 \\ n.a_2 \end{pmatrix}$

   b) $\underline{a} + \underline{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$

   c) $\underline{a} - \underline{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}$

d. Tugas 3

1) Gambarlah pada bidang koordinat Cartesius vektor $\overrightarrow{AD}$ dengan A(1,2) dan D(4,5) dan vektor $\overrightarrow{BK}$ dengan B(3,-2) dan K(-1,3).

   Tentukan $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BK}$ dan $\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{AD}$.

   Apa yang dapat Anda simpulkan?
2) Jika $\underline{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ dan $\underline{q} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

   Tentukan:

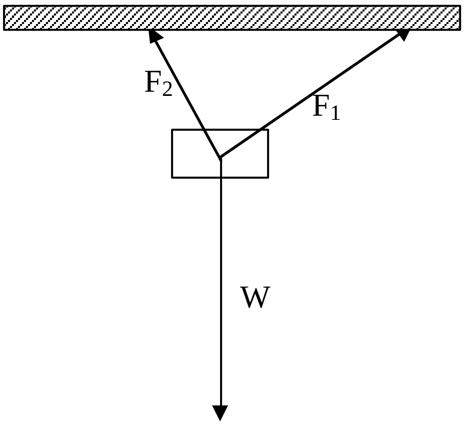
   a) $\underline{p} + \underline{q}$

   b) $2\underline{p} - \underline{q}$

   c) $3\underline{p} + 2\underline{q}$

   d) $\underline{p} - \frac{1}{2}\underline{q}$

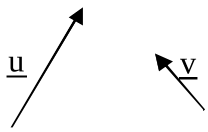
3) Pada sebuah benda yang digantung bekerja gaya-gaya berikut.



Tentukan resultante dari ketiga gaya tersebut.

e. Tes Formatif 3

1) Perhatikan gambar berikut



Gambarlah: (a) 3$\underline{u}$ (b) -2$\underline{v}$ (c) $\underline{u}$ + $\underline{v}$ d) 2$\underline{u}$ – $\underline{v}$

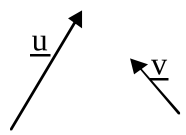
2) Jika $\underline{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ dan $\underline{q} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ tentukan

(a) 2$\underline{p}$ (b) -3$\underline{q}$ (c) 3$\underline{p}$ + 2$\underline{q}$ (d) 2$\underline{q}$ – $\underline{p}$

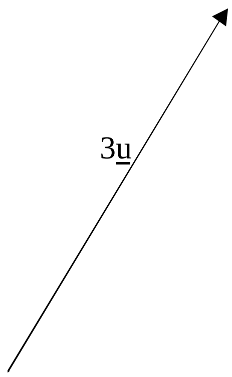
3) Seekor burung yang terbang lurus ke timur dengan kecepatan 30 km/jam. Pada saat bersamaan angin berhembus ke utara dengan kecepatan 20km/jam. Berapakah kecepatan terbang burung setelah dipengaruhi hembusan angin? Berapakah jarak tempuh burung tersebut dari tempat semula setelah 30 menit terbang?

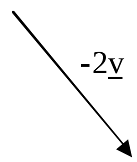
f. Kunci Jawaban Tes Formatif 3

1)

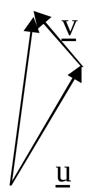


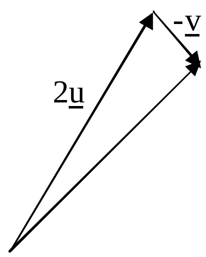
(a) 3u (b) -2v





(c) u + v (d) 2u -v





2) Jika $\underline{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ dan $\underline{q} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

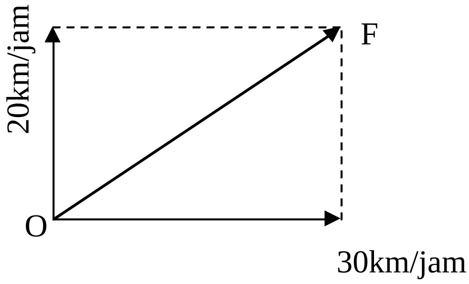
a) $2\underline{p} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

b) $-3\underline{q} = -3\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \end{pmatrix}$

c) $3\underline{p} + 2\underline{q} = 3\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \end{pmatrix}$

d) $2\underline{q} - \underline{p} = 2\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -1 \end{pmatrix}$

3) Dengan metode jajargenjang perjalanan burung dapat digambarkan sebagai berikut:



Kecepatan terbang burung adalah resultante dari kedua vektor tersebut

$\overrightarrow{OF}$? $\sqrt{30^2 \text{ ? } 20^2}$? $\sqrt{900 \text{ ? } 400}$? $\sqrt{1300}$ = 36,055.

Jadi kecepatan burung adalah 36,055 km/jam.

Jarak tempuh burung setelah 30 menit adalah:

$\frac{30}{60}$ x36,055 = 18,028 km.

4. Kegiatan Belajar 4: Lingkup Vektor pada Bangun Ruang

a. Tujuan Kegiatan Belajar 4

Setelah mempelajari kegiatan belajar 4 ini, diharapkan anda dapat:

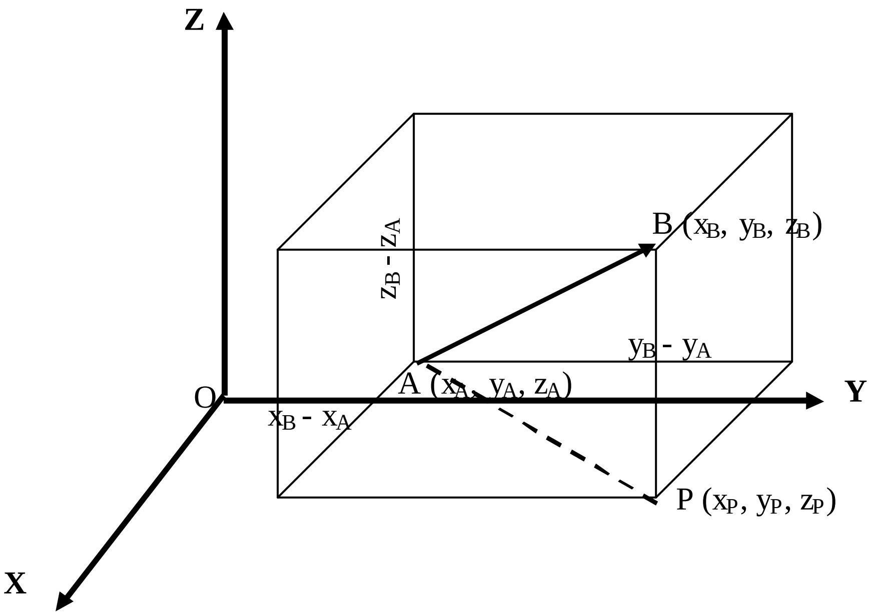
- ✍ Menghitung modulus vektor bila diberikan suatu vektor pada bangun ruang.
- ✍ Menentukan vektor posisi suatu vektor pada bangun ruang.
- ✍ Menyatakan bahwa dua vektor pada bangun ruang sama.
- ✍ Menentukan negatif dari suatu vektor pada bangun ruang.
- ✍ Menyatakan pengertian vektor nol pada bangun ruang.
- ✍ Menentukan vektor satuan pada bangun ruang.

b. Uraian Materi 4

Anda telah mempelajari kegiatan belajar 2 dan 3 mengenai vektor pada bidang datar. Pada kegiatan belajar 4 ini Anda akan mempelajari mengenai vektor pada bangun ruang.

1) Modulus Vektor

Vektor pada bangun ruang yang digambarkan pada bidang koordinat ruang Cartesius mempunyai komponen searah sumbu X, komponen searah sumbu Y dan komponen searah sumbu Z. Ketiga sumbu tersebut saling tegak lurus pada ruang. Pada umumnya ketiga sumbu tersebut digambarkan dengan kaidah tangan kanan, yaitu dengan menggerakkan ibu jari, telunjuk dan jari tengah dari tangan kanan sehingga saling tegak lurus (lihat gambar). Telunjuk mewakili arah positif sumbu X, jari tengah mewakili arah positif sumbu Y dan ibu jari mewakili arah positif sumbu Z.



Komponen vektor $\overrightarrow{AB}$ searah sumbu X sebesar $x_B - x_A$, komponen vektor $\overrightarrow{AB}$ yang searah sumbu Y sebesar $y_B - y_A$, dan komponen vektor $\overrightarrow{AB}$ yang searah sumbu Z sebesar $z_B - z_A$.

Besar vektor $\overrightarrow{AB}$ adalah panjang $\overline{AB}$ dan disebut modulus vektor $\overrightarrow{AB}$. Perhatikan vektor $\overrightarrow{AB}$ merupakan diagonal ruang maka panjang $\overline{AB}$ dapat dihitung sebagai:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2 + (Z_B - Z_A)^2}$$

Contoh 4.1:

Jika J(3,-5,2) dan K(-1,7,4) maka modulus vektor $\overrightarrow{JK}$ adalah

$$|\overline{JK}| = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (7 - (-5))^2 + (4 - 2)^2}$$

$$= \sqrt{(-4)^2 + 12^2 + 2^2}$$

$$= \sqrt{16 + 144 + 4}$$

$$= \sqrt{164}$$

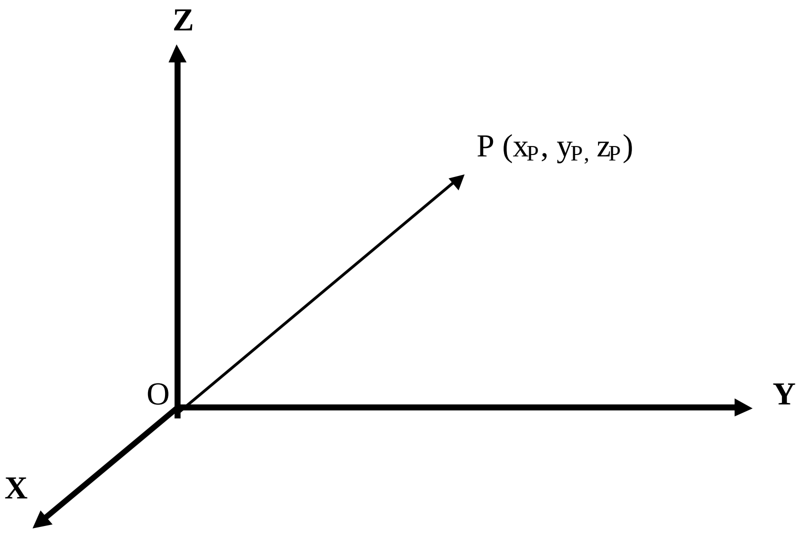
$$= 12,806$$

Jadi modulus vektor $\overrightarrow{JK}$ adalah 12,806 satuan.

2) Vektor Posisi

Vektor pada bangun ruang dapat digambarkan pada ruang koordinat Cartesius. Setiap titik P pada ruang dapat dinyatakan sebagai vektor $\overrightarrow{OP}$, yaitu vektor yang berpangkal di titik O(0,0,0) dan berujung di titik P. Vektor $\overrightarrow{OP}$ disebut vektor posisi dari titik P pada ruang koordinat Cartesius. Koordinat titik P merupakan komponen-komponen dari vektor posisi $\overrightarrow{OP}$ tersebut.

Contoh 4.2:



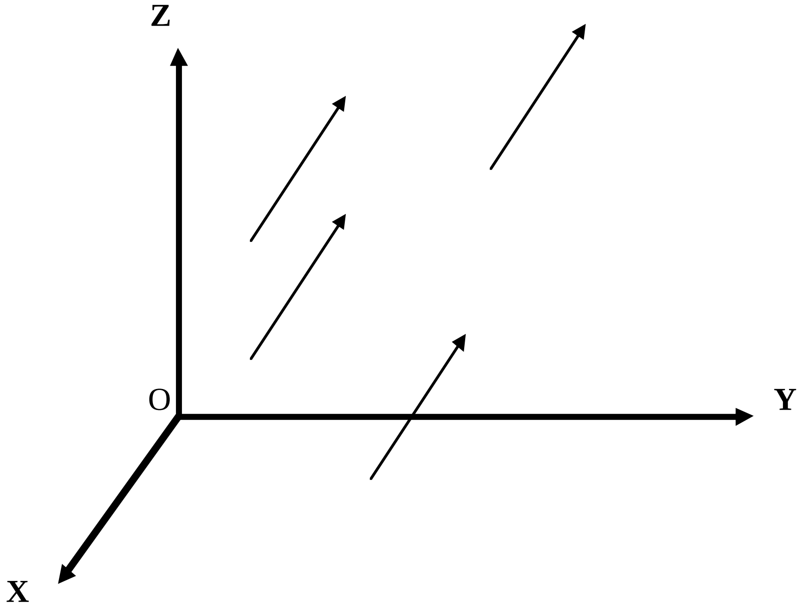
Pada contoh di atas vektor posisi $\overrightarrow{OP}$ mempunyai komponen searah sumbu X sebesar x_p, komponen searah sumbu Y sebesar y_p dan komponen searah sumbu Z sebesar z_p.

Modulus vektor $\overrightarrow{OP}$ adalah $|\vec{OP}| = \sqrt{x_p^2 + y_p^2 + z_p^2}$.

3) Kesamaan Dua Vektor

Dua vektor di ruang dikatakan sama jika mempunyai besar dan arah yang sama.

Perhatikan gambar berikut:

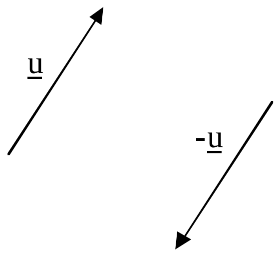


Keempat vektor pada gambar di atas adalah sama karena mempunyai besar dan arah yang sama.

4) Vektor Negatif

Vektor di ruang yang besarnya sama dengan vektor u tetapi arahnya berlawanan disebut vektor negatif dari u dan ditulis sebagai -u.

Contoh 4.3:



Jika komponen vektor u = $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ maka –u = $\begin{pmatrix} -a \\ -b \\ -c \end{pmatrix}$.

5) Vektor Nol

Yang dimaksud dengan vektor nol adalah vektor yang besarnya nol atau tidak mempunyai panjang (berupa titik). Vektor nol tidak mempunyai arah tertentu. Vektor nol dilambangkan dengan 0= $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Pada koordinat ruang Cartesius, vektor nol adalah titik O(0,0,0).

6) Vektor Satuan

Vektor yang mempunyai panjang 1 satuan disebut vektor satuan.

Contoh 4.4:

Vektor $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ adalah vektor satuan karena modulus $\underline{a}$,

$|\underline{a}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1$

Vektor $\underline{b} = \begin{pmatrix} \frac{3}{13} \\ -\frac{4}{13} \\ \frac{12}{13} \end{pmatrix}$ adalah vektor satuan

karena modulus $\underline{b}$ = $\sqrt{\left(\frac{3}{13}\right)^2 + \left(-\frac{4}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{169} + \frac{16}{169} + \frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{169}{169}} = 1$.

Kita dapat menentukan vektor satuan yang searah dengan suatu vektor $\underline{v}$ dengan rumus: $\frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}$.

Contoh 4.5:

Diketahui vektor $\underline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Vektor satuan yang searah dengan vektor $\underline{c}$ adalah vektor $\frac{\underline{c}}{|\underline{c}|}$. Karena $|\underline{c}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$, maka vektor satuannya adalah $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$. Coba Anda periksa apakah modulus vektor tersebut sama dengan 1.

c. Rangkuman 4

Modulus vektor pada bangun ruang adalah besar dari vektor yang merupakan panjang segmen garis berarah yang menyatakan vektor tersebut.

Modulus vektor u = $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dinyatakan dengan |u|= $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Vektor posisi adalah vektor yang menyatakan kedudukan setiap titik di ruang koordinat Cartesius. Vektor posisi berpangkal di titik O(0,0,0) dan berujung di titik pada ruang koordinat.

Dua vektor dikatakan sama jika mempunyai besar dan arah yang sama.

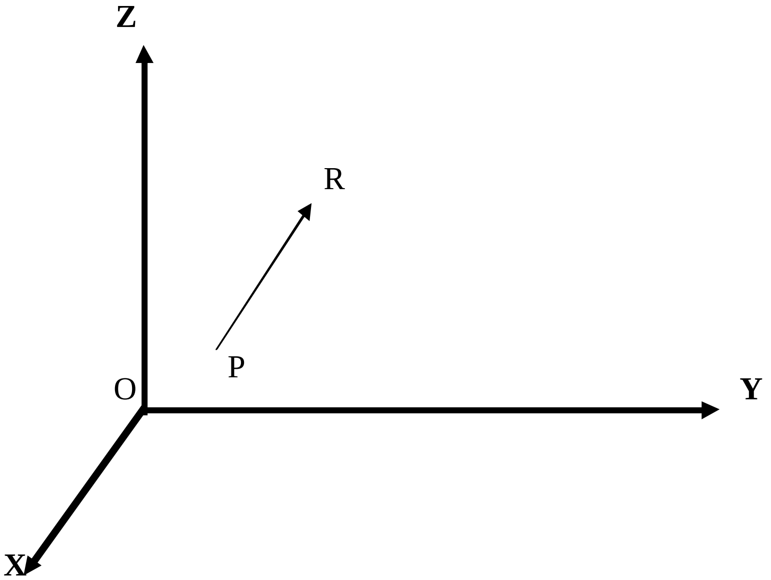
Vektor yang besarnya sama dengan u tetapi arahnya berlawanan dengan u dikatakan vektor negatif u.

Vektor nol adalah vektor yang besarnya nol dan tidak mempunyai arah.

Vektor satuan adalah vektor yang besarnya 1. Vektor satuan yang searah dengan suatu vektor v ditentukan dengan rumus $\frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}$.

d. Tugas 4

1) Gambarlah vektor dengan P(2, -3,1) dan S(1,3,-2)
    a) Hitung modulus vektor $\overrightarrow{PS}$
    b) Buat vektor negatif dari $\overrightarrow{PS}$, kemudian hitung modulusnya
    c) Apa yang dapat Anda simpulkan dari pekerjaan Anda di atas?
2) Perhatikan gambar berikut.



Jika P(1,1,1) dan R(-1,4,6), tentukanlah vektor-vektor verikut:

a) Vektor yang sama dengan vektor $\overrightarrow{PR}$

b) negatif dari vektor $\overrightarrow{PR}$

c) vektor satuan yang searah dengan vektor $\overrightarrow{PR}$

d) vektor nol

e) vektor posisi yang sama dengan dari titik P dan titik R.

e. Tes Formatif 4

1) Tentukan modulus dari vektor-vektor berikut

a) $\underline{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{AN}$ dengan A(-2,3,-1) dan N(2,1,-4)

2) Vektor $\overrightarrow{DG}$ dengan D(2,5,-4) dan G(1,0,-3). Tentukan

a) koordinat K di mana $\overrightarrow{TK}$ sama dengan $\overrightarrow{DG}$ dengan T(2,-2,4)

b) koordinat M di mana $\overrightarrow{SM}$ merupakan negatif vektor $\overrightarrow{DG}$ dengan S(-1,3,2)

3) Tentukan vektor satuan satuan yang searah dengan vektor-vektor berikut:

a) $\underline{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\overrightarrow{RP}$ dengan R(3,-2,1) dan P(2,-2,1)

d) $\overrightarrow{SK}$ dengan S(2,1,2) dan K(2,0,3)

f. Kunci Tes Formatif 4

1) a) $\underline{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ ?5 \\ ?3 \end{pmatrix}$

$|\underline{d}| = \sqrt{4^2 ? (?5)^2 ? (?3)^2} = \sqrt{16 ? 25 ? 9} = \sqrt{50} = 7{,}071$

b) $\overrightarrow{AN}$ dengan A(-2,3,-1) dan N(2,1,-4)

$|\overrightarrow{AN}| = \sqrt{(1 ? (?2))^2 ? (?4 ? 3)^2 ? (?4 ? 1)^2}$

$= \sqrt{3^2 ? (?7)^2 ? (?5)^2} ? \sqrt{9 ? 49 ? 25} ? \sqrt{83} = 9{,}11$

2) $\overrightarrow{DG} = \begin{pmatrix} ?1 \\ ?5 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) K(1, -7, 5) b) M(0, 8, 1)

3) a) $\underline{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ?1 \end{pmatrix}$ karena $\sqrt{0^2 ? 0^2 ? (?1)^2} ? \sqrt{0 ? 0 ? 1} ? \sqrt{1} ? 1$

b) $\dfrac{\underline{w}}{|\underline{w}|} ? \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

c) $\vec{RP} = \begin{pmatrix} ?1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ karena

$\sqrt{(2 ? 3)^2 ? (?2 ? (?2))^2 ? (1 ? 1)^2} ? \sqrt{(?1)^2 ? 0^2 ? 0^2} ? \sqrt{1 ? 0 ? 0} ? \sqrt{1} ? 1$.

d) $\dfrac{\vec{SK}}{|\overrightarrow{SK}|} ? \begin{pmatrix} 0 \\ ?\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

5. Kegiatan Belajar 5: Operasi Vektor pada Bangun Ruang

a. Tujuan Kegiatan Belajar 5

Setelah mempelajari kegiatan belajar 5 ini, diharapkan Anda dapat:

- ✍ Menentukan hasil kali suatu vektor pada bangun ruang dengan skalar.
- ✍ Menentukan hasil penjumlahan vektor-vektor pada bangun ruang.
- ✍ Menentukan selisih dua vektor pada bangun ruang.
- ✍ Menentukan perkalian skalar dua vektor pada bangun ruang bila diketahui komponen-komponennya.

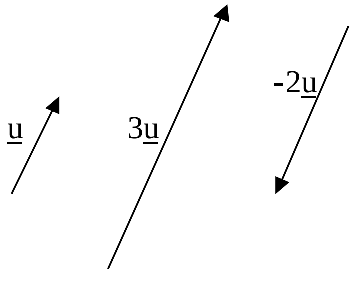
b. Uraian Materi 5

1) Hasil Kali Vektor dengan Skalar pada Bangun Ruang

Seperti telah dibahas di kegiatan belajar 3, hasil kali vektor dengan skalar sekarang kita kembangkan pada bangun ruang. Anda akan menggunakan pemahaman anda tentang vektor dan skalar di kegiatan belajar ini. Vektor dapat dioperasikan dengan skalar. Karena skalar merupakan bilangan, maka perkalian vektor dengan skalar hanya akan berpengaruh pada besar vektor saja sedangkan arah vektor tetap.

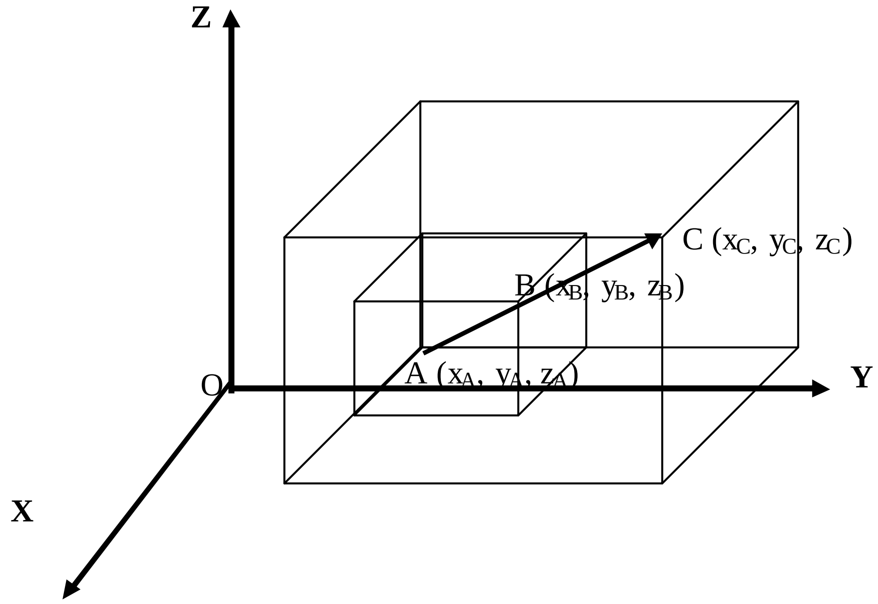
Hasil kali vektor $\underline{u}$ dengan skalar 2 akan menghasilkan vektor dengan besar 2 kalinya sedangkan arahnya tetap. Secara umum, hasil kali vektor $\underline{u}$ dengan skalar n akan menghasilkan vektor yang besarnya n kali besar $\underline{u}$ dan arahnya sama dengan $\underline{u}$ bila n positif dan berlawanan arah $\underline{u}$ bila n negatif.

<u>Contoh 5.1:</u>



Contoh 5.2:

Pada koordinat ruang Cartesius



Vektor $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$

$x_C - x_A = 2(x_B - x_A)$

$y_C - y_A = 2(y_B - y_A)$

$z_C - z_A = 2(z_B - z_A)$

Secara umum, jika $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ maka $n\underline{a} = \begin{pmatrix} n.a_1 \\ n.a_2 \\ n.a_3 \end{pmatrix}$.

Contoh 5.3:

Jika $\underline{h} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ maka $3\underline{h} = \begin{pmatrix} 3 \times 2 \\ 3 \times 1 \\ 3 \times -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$

$$-2\underline{h} = \begin{pmatrix} -2 \times 2 \\ -2 \times 1 \\ -2 \times -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

2) Penjumlahan Vektor pada Bangun Ruang

Pada dasarnya penjumlahan vektor pada bangun ruang sama dengan penjumlahan vektor pada bidang datar, menggunakan hukum segitiga atau hukum jajargenjang. Hanya saja komponen vektor yang ditambahkan menjadi lebih banyak satu komponen.

Secara umum, jika $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ dan $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

$$\text{maka } \underline{a} + \underline{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

Contoh 5.4:

Jika $\underline{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ dan $\underline{q} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ maka $\underline{p} + \underline{q} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Contoh 5.5:

Seorang pendaki gunung memulai pendakian gunung dari kaki gunung yang dapat dinyatakan sebagai posisi/koordinat O(0,0,0).

Dari titik O pendaki gunung tersebut menuju lokasi A yang berkedudukan 5 km ke arah timur, 4 km ke arah utara dan 3 km ke atas. Dari lokasi A dia melanjutkan perjalanan ke lokasi B yang berkedudukan 4 km ke arah timur, 1 km ke arah selatan dan 3 km ke atas. Di manakah kedudukan pendaki gunung tersebut apabila di lihat dari posisi mula-mula (lokasi O(0,0,0))?

Jawab:

Dari lokasi mula-mula ke lokasi A dapat dinyatakan sebagai vektor $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Dari lokasi A ke lokasi B dapat dinyatakan sebagai vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Kedudukan pendaki gunung dilihat dari lokasi mula-mula adalah

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\3\\6\end{pmatrix}.$$

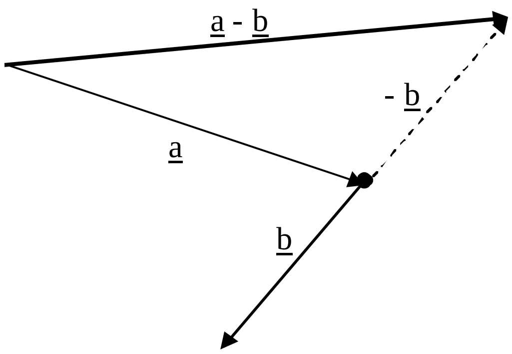
Dapat diartikan bahwa pendaki gunung tersebut terletak 9 km ke arah timur, 3 km ke arah utara, dan pada ketinggian 6 km dari kedudukan mula-mula.

3) Selisih Dua Vektor pada Bangun Ruang

Selisih atau pengurangan adalah lawan dari penjumlahan. Selisih dua vektor berarti menjumlahkan vektor pertama dengan lawan (negatif) vektor kedua. Dengan demikian

$\underline{a} – \underline{b} = \underline{a} + (-\underline{b})$

Perhatikan gambar berikut



Selisih dua vektor pada koordinat ruang Cartesius pada dasarnya sama dengan selisih vektor dua vektor pada koordinat bidang Cartesius, hanya saja komponen vektornya ada tiga.

Dengan demikian jika $\underline{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ dan $\underline{b} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$

maka $\underline{a} - \underline{b} = \begin{pmatrix}a_1 - b_1\\a_2 - b_2\\a_3 - b_3\end{pmatrix}$

Contoh 5.6:

Jika $\underline{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dan $\underline{q} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ maka $\underline{p} - \underline{q} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

4) Perkalian Skalar Dua Vektor

Dua vektor pada bangun ruang dapat dikalikan dan hasilnya merupakan skalar. Hal ini sering disebut sebagai *dot product* (hasil kali titik) dari dua vektor dan didefinisikan sebagai berikut.

Jika $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ dan $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

maka $\underline{a} \,.\, \underline{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$

Contoh 5.7:

Jika $\underline{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan $\underline{q} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

maka $\underline{p} \,.\, \underline{q} = -10 + (-4) + 4 = -10.$

c. Rangkuman 5

Hasil kali vektor $\underline{u}$ dengan skalar n akan menghasilkan vektor yang besarnya n kali besar $\underline{u}$ dan arah sama dengan $\underline{u}$.

Penjumlahan dua vektor pada bangun ruang prinsipnya sama dengan penjumlahan dua vektor pada bidang datar.

Selisih dua vektor berarti menjumlahkan vektor pertama dengan lawan (negatif) vektor kedua. Dengan demikian $\underline{a} - \underline{b} = \underline{a} + (-\underline{b})$.

Pada koordinat ruang Cartesius jika $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ dan $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ maka

1) $n\underline{a} = \begin{pmatrix} n.a_1 \\ n.a_2 \\ n.a_3 \end{pmatrix}$

2) $\underline{a} + \underline{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$

3) $\underline{a} - \underline{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$

4) $\underline{a} \,.\, \underline{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

d. Soal Latihan 5

1) Pada koordinat ruang Cartesius terdapat vektor $\overrightarrow{KD}$ dengan K (2,3,1) dan D(5,-2,0). Tentukan koordinat M jika $\overrightarrow{PM} = 3\overrightarrow{KD}$ dan koordinat P(-2,0,4).

2) Jika $\underline{s} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\underline{m} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ dan $\underline{k} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ hitunglah

   a) $\frac{3}{2}\underline{s}$ b) $3\underline{m} + \underline{k}$ c) $2\underline{s} - 4\underline{m}$

3) Jika $\underline{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$, $\underline{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$ dan $\underline{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$ tentukan

   a) $\underline{s} = \underline{p} + \underline{q}$ c) $\underline{t} = \underline{q} + \underline{r}$

   b) $\underline{u} = \underline{s} + \underline{r}$ d) $\underline{v} = \underline{p} + \underline{t}$

   Apa yang dapat Anda katakan tentang $\underline{u}$ dan $\underline{v}$?

4) Jika $\underline{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{q} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ dan $\underline{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ hitunglah

   a) $\underline{s} = \underline{p} - \underline{q}$ c) $\underline{t} = \underline{q} - \underline{r}$

   b) $\underline{u} = \underline{s} - \underline{r}$ d) $\underline{v} = \underline{p} - \underline{t}$

   Apakah yang dapat Anda katakan tentang $\underline{u}$ dan $\underline{v}$?

5) Jika $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ dan $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ tentukan

a) $\underline{a} \cdot \underline{b}$ b) $-\underline{a} \cdot \underline{b}$

c) $\underline{a} \cdot -\underline{b}$ d) $-\underline{a} \cdot -\underline{b}$

Apa yang dapat Anda simpulkan dari hasil-hasil di atas?

e. Tes Formatif 5

1) Pada koordinat ruang Cartesius koordinat A(2,1,-2) dan B(1,-2,1). Jika $\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AB}$ tentukan koordinat C.

2) Jika $\underline{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan $\underline{k} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ hitunglah $3\underline{p} + 2\underline{k}$.

3) Tentukan $2\underline{p} - \underline{k}$ untuk soal di atas.

4) Jika $\underline{m} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$ dan $\underline{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ tentukan $2\underline{m} \cdot (\underline{n} - \underline{m})$.

f. Kunci Jawaban Tes Formatif 5

1) $\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AB}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} X_C - X_A \\ Y_C - Y_A \\ Z_C - Z_A \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} X_B - X_A \\ Y_B - Y_A \\ Z_B - Z_A \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} X_C - 2 \\ Y_C - 1 \\ Z_C - (-2) \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 - 2 \\ -2 - 1 \\ 1 + 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -15 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -14 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Jadi koordinat C adalah (-3,-14,13)

2) $3\underline{p} + 2\underline{k} = 3\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}$

3) $2\underline{p} - \underline{k} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}$

4) $2\underline{m} \cdot (\underline{n} - \underline{m}) = 2\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}$

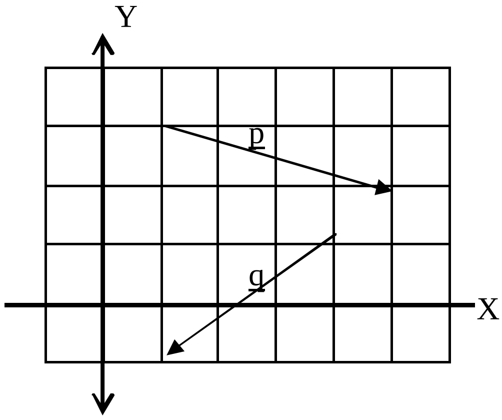
$= -8 + (-126) + (-28) = -162$

BAB III. EVALUASI

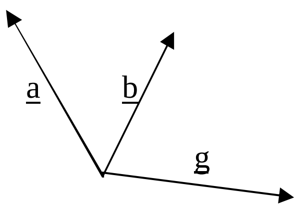
A. Soal Tes Evaluasi

Kerjakan semua soal berikut.

1) Tulislah notasi vektor berikut



2) Tentukan resultante dari vektor-vektor $\underline{a}$, $\underline{b}$, dan $\underline{g}$ seperti terlihat pada gambar berikut.



3) Pada koordinat bidang Cartesius, A(3,4), B(-2,3) dan C(5,-1). Tentukan komponen dari $\overrightarrow{AC}$? $2\overrightarrow{BC}$? $\overrightarrow{BA}$

4) Pada koordinat ruang Cartesius, hitunglah panjang vektor $\overrightarrow{AD}$ jika A(4,-2,5) dan D(6,0,-1).

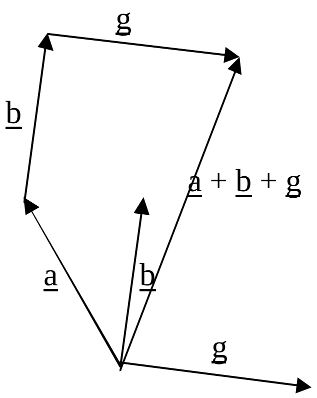
5) Pada koordinat ruang Cartesius, hitunglah $\overrightarrow{PQ}$?$\overrightarrow{PR}$ jika P(2,-3,1), Q(0,-2,5) dan R(-1,6,-2).

B. Kunci Jawaban Soal Tes Evaluasi

1) Komponen horizontal dari vektor p adalah 4, komponen vertikal dari vektor p adalah -1.

   Komponen horizontal dari vektor q adalah -3, komponen vertikal dari vektor q adalah -2.

2) Resultante dari vektor-vektor berikut



3) $\overrightarrow{AC} ? 2\overrightarrow{BC} ? \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 5 ? 3 \\ ? 1 ? 4 \end{pmatrix} ? 2\begin{pmatrix} ?5 ? (?2) \\ ? 1 ? 3 \end{pmatrix} ? \begin{pmatrix} ?3 ? (?2) \\ 4 ? 3 \end{pmatrix}$

   $= \begin{pmatrix} 2 \\ ? 5 \end{pmatrix} ? \begin{pmatrix} ?14 \\ ? 8 \end{pmatrix} ? \begin{pmatrix} ?5 \\ 1 \end{pmatrix} ? \begin{pmatrix} 11 \\ ?14 \end{pmatrix}$

4) $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 3 ? 6 \\ 0 ? (?2) \\ ? 1 ? 5 \end{pmatrix} ? \begin{pmatrix} ? 3 \\ 2 \\ ? 6 \end{pmatrix}$

   Panjang $\overrightarrow{AD} = \sqrt{(?3)^2 ? 2^2 ? (?6)^2} ? \sqrt{9 ? 4 ? 36} ? \sqrt{49} ? 7$

5) $\overrightarrow{PQ} ? \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 0 ? 2 \\ ? 2 ? (?3) \\ 5 ? 1 \end{pmatrix} ? \begin{pmatrix} ? 1 ? 2 \\ ?6 ? (?3) \\ ? 2 ? 1 \end{pmatrix} ? \begin{pmatrix} ? 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} ? \begin{pmatrix} ? 3 \\ 9 \\ ? 3 \end{pmatrix}$

   = -2.-3 + 1.9 + 4. -3

   = 6 + 9 -12 = 3

BAB IV. PENUTUP

Setelah menyelesaikan modul ini, anda berhak untuk mengikuti tes praktek untuk menguji kompetensi yang telah anda pelajari. Apabila anda dinyatakan memenuhi syarat kelulusan dari hasil evaluasi dalam modul ini, maka anda berhak untuk melanjutkan ke topik/modul berikutnya.

Mintalah pada guru untuk uji kompetensi dengan sistem penilaian yang dilakukan langsung oleh pihak industri atau asosiasi yang berkompeten apabila anda telah menyelesaikan seluruh evaluasi dari setiap modul, maka hasil yang berupa nilai dari guru atau berupa portofolio dapat dijadikan bahan verifikasi oleh pihak industri atau asosiasi profesi. Kemudian selanjutnya hasil tersebut dapat dijadikan sebagai penentu standar pemenuhan kompetensi dan bila memenuhi syarat anda berhak mendapatkan sertifikat kompetensi yang dikeluarkan oleh dunia industri atau asosiasi profesi.

DAFTAR PUSTAKA

Edwin J. Purcell, Dale Varberg, 1984. **Kalkulus dan Geometri Analitis** (terjemahan I Nyoman Susila dkk), Penerbit Erlangga, Jakarta.

Leonard I. Holder, James DeFranza, Jay M. Pasachoff, 1988. **Multivariabel Calculus**, Brooks/Cole Pub. Co., California.

B.K. Noormandiri dan Endar Sucipto, 1994. **Matematika SMU untuk kelas 3 Program IPA**, Penerbit Erlangga, Jakarta